Preuve d'une transition de phase dans les automates cellulaires α-asynchrones

Damien Regnault

Université d'Évry – Val d'Essonne, IBISC

11 janvier 2013

Les probabilités comme adversaire

Dans ce modèle, on considère un automate cellulaire déterministe classique sauf qu'à chaque pas de temps, chaque cellule a une probabilité ϵ de commettre une faute et de passer dans un état quelconque.

Theorem (A. Toom 1980)

Il existe un automate cellulaire en dimension 3 *capable de faire des calculs fiables en présence d'erreurs.*

Theorem (Gács 2001)

Il existe un automate cellulaire en dimension 1 *capable de faire des calculs fiables en présence d'erreurs.*

Les probabilités comme alliée

Problème de la classification de densité [N. H. Packard, 1988] : existe-t-il une règle capable de déterminer l'état majoritaire d'une configuration initiale finie ?

Theorem (M. Land and R. K. Belew 1995)

Il n'existe pas de règle déterministe à deux états en dimension 1 *résolvant ce problème.*

Theorem (N. Fatès, 2011)

Il existe une règle probabiliste à deux états en dimension 1 *résolvant ce problème avec une précision arbitraire.*

Les probabilités pour modéliser des systèmes réels

Modélisation : simplifier un phénomène réel pour obtenir un objet mathématique. Exemple utilisant des automates cellulaires : traffic, propagation de feu de forêt, d'épidémie, modèle d'Ising (ferromagnétisme).

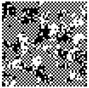
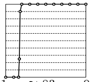
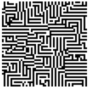
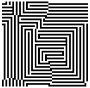
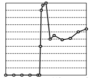
La règle Minorité en dynamique α-asynchrone

Minorité : une cellule mise à jour selon la règle Minorité passe dans l'état qui est minoritaire dans son voisinage.

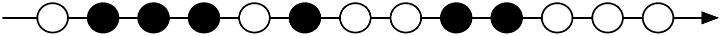
α-**asynchronisme :** à chaque pas de temps, chaque cellule à une probabilité α de se mettre à jour (on applique la règle de transition de l'automate) et $1 - \alpha$ de rester dans son état actuel.

liens entre Minorité et la cristallographie

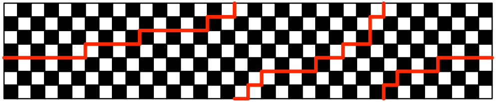
Topologie : $2D$ finie torique **Voisinage** : Von Neumann

	$\alpha = 1$	$\alpha = 0.95$	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0$	$\Pr\{c^{T_s}$ is stable$\}$
v. Neumann neigh. at Step $20N$ Go to [12] for animated sequences							 1 $\alpha_c \approx .83$ 0
Moore neigh. at Step $50N$ Go to [12] for animated sequences							 1 $\alpha_c \approx .57$ 0
Empirical observations	Large flashing homogeneous regions	Random noise erodes large flashing regions		A stable pattern emerges (checkerboards and stripes for N- and M-neighborhoods respectively) and rapidly covers the whole configuration when both dimensions are even.			

Liens entre Minorité et processus Tasep



TASEP

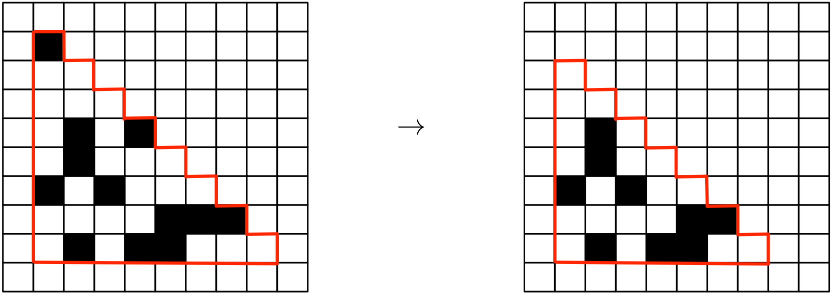


$\alpha \approx 0$

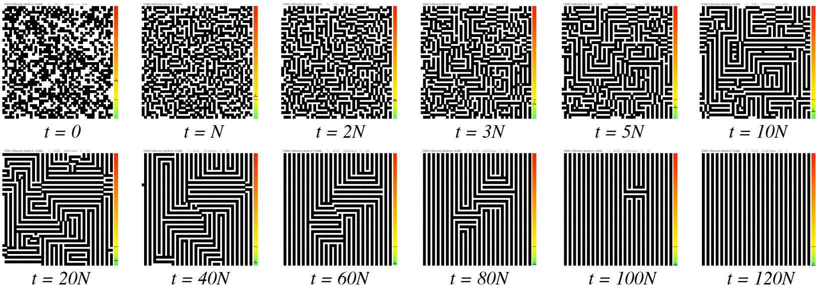
Conclusion de cette partie

La règle de Toom

Le voisinage d'une cellule consiste en elle-même, la cellule du dessus et la cellule de droite. Une cellule prend l'état majoritaire dans son voisinage.



Interactions entre deux zones

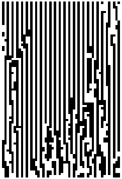


Dimension 1

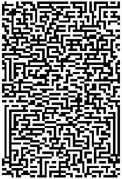
En dimension 1, il est difficile de détecter les bords d'une zone.

Retour à Minorité $1D$

Minorité



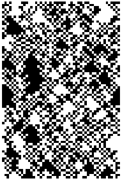
$\alpha = 0.25$



$\alpha = 0.75$

Flip-If-Not-All-Equal

$\alpha = 0.25$

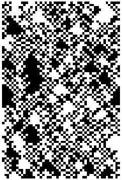


$\alpha = 0.75$

Intérêt de Flip-If-Not-All-Zero

Flip-If-Not-All-Equal

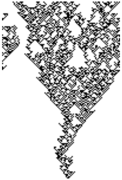
$\alpha = 0.25$



$\alpha = 0.75$

Flip-If-Not-All-Zero

$\alpha = 0.25$



$\alpha = 0.75$

Preuve d'une transition de phase dans l'automate Flip-If-Not-All-Zero en dynamique α-asynchrone

L'état de la cellule mise à jour change si toutes les cellules de son voisinage ne sont pas dans l'état 0.

$\alpha = 0.25$ $\alpha = 0.5$ $\alpha = 0.75$ $\alpha = 0.9$ $\alpha = 1$

Preuve d'une transition de phase dans l'automate Flip-If-Not-All-Zero en dynamique α-asynchrone

La variable aléatoire T désigne la première fois qu'une séquence de configurations atteint la configuration stable tout blanc.

Theorem (Résultat principal)

Considérons une séquence de configurations $(c^t)_{t\geq 0}$ *évoluant selon la règle* Flip-If-Not-All-Zero *sous la dynamique* α*-asynchrone, si* $\alpha \leq 0.5$ *alors* $\mathbb{E}[T] = O(n^2\alpha^{-1})$ *et si* $\alpha \geq 1 - \epsilon$ *(où* $\epsilon = 0.187 \times 10^{-13} > 0$*) alors* $\mathbb{E}[T] = \Omega(2^n)$*.*

Phase $\alpha \leq 0.5$: Idée de la preuve

Considérons une zone blanche semi-infinie à gauche et une zone noire semi-infinie à doite.

Essayons d'évaluer l'espérance de la variation de la frontière blanc-noir :

Phase $\alpha \leq 0.5$: Idée de la preuve

Considérons une zone blanche semi-infinie à gauche et une zone noire semi-infinie à doite.

Essayons d'évaluer l'espérance de la variation de la frontière blanc-noir :

$$-\alpha$$

Phase $\alpha \leq 0.5$: Idée de la preuve

Considérons une zone blanche semi-infinie à gauche et une zone noire semi-infinie à doite.

Essayons d'évaluer l'espérance de la variation de la frontière blanc-noir :

$$-\alpha + \alpha(1 - \alpha) = -\alpha^2$$

Phase $\alpha \leq 0.5$: Idée de la preuve

Considérons une zone blanche semi-infinie à gauche et une zone noire semi-infinie à doite.

Essayons d'évaluer l'espérance de la variation de la frontière blanc-noir :

$$-\alpha^2 + \alpha^2(1-\alpha) = -\alpha^3$$

Phase $\alpha \leq 0.5$: Idée de la preuve

Considérons une zone blanche semi-infinie à gauche et une zone noire semi-infinie à doite.

Essayons d'évaluer l'espérance de la variation de la frontière blanc-noir :

$$-\alpha^3 + \alpha^3(1 - \alpha) = -\alpha^4$$

Phase $\alpha \leq 0.5$: Idée de la preuve

Considérons une zone blanche semi-infinie à gauche et une zone noire semi-infinie à doite.

Essayons d'évaluer l'espérance de la variation de la frontière blanc-noir :

$$-\alpha^4 + \alpha^4(1-\alpha) = -\alpha^5$$

Phase $\alpha \leq 0.5$: fonction potentiel

Definition (fonction potentiel)

Le potentiel de la configuration tout blanc est 0. Le potentiel des autres configurations est $2n$ moins la taille de la plus longue zone blanche.

Phase $\alpha \leq 0.5$: fonction potentiel

Definition (fonction potentiel)

Le potentiel de la configuration tout blanc est 0. Le potentiel des autres configurations est $2n$ moins la taille de la plus longue zone blanche.

Lemma

Soit $(X^t)_{t\geq 0}$ une séquence de variables aléatoires prenant leur valeur dans $\{0, \ldots, m\}$ telle que :

- *si $0 < X^t < m$ alors $\mathbb{E}[X^{t+1} - X^t | \mathcal{F}^t] \leq 0$ et $\Pr\{|X^{t+1} - X^t| \geq 1 | \mathcal{F}^t\} \geq \epsilon$;*
- *si $X^t = m$ alors $\mathbb{E}[X^{t+1} - X^t | \mathcal{F}^t] \leq -\epsilon$.*

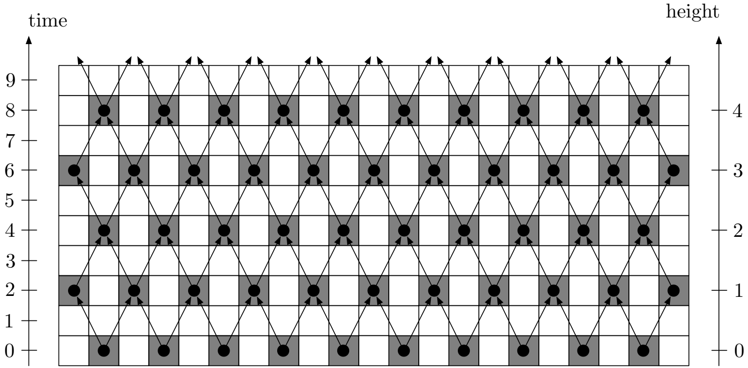
Soit $T = \min\{t \in \mathbb{N} : X^t = 0\}$ et $x_0 = \mathbb{E}[X^0]$. Alors :

$$\mathbb{E}[T] \leq \frac{x_0(2m + 1 - x_0)}{2\epsilon}$$

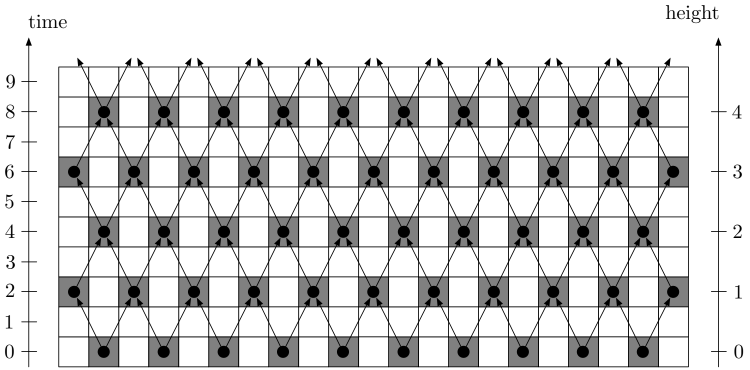
Phase $\alpha \geq 1 - \epsilon$ (where $\epsilon = 0.187 \times 10^{-13} > 0$)

Preuve par couplage

Phase $\alpha \geq 1 - \epsilon$ (where $\epsilon = 0.187 \times 10^{-13} > 0$)

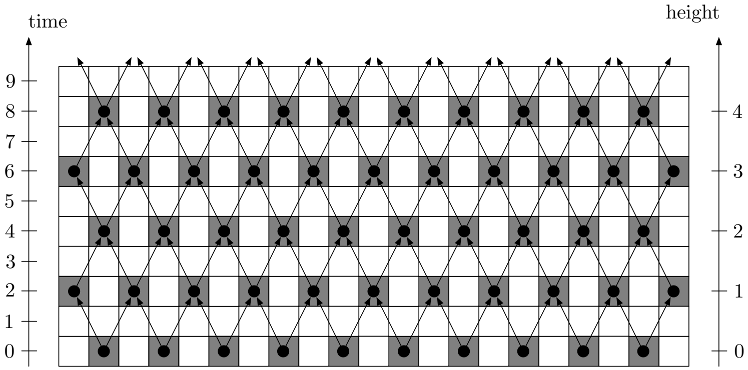


Phase $\alpha \geq 1 - \epsilon$ (where $\epsilon = 0.187 \times 10^{-13} > 0$)



Critère de correspondance : les cellules correspondant aux sites du cluster ouvert possèdent une de leur voisine dans un état différent du leur.

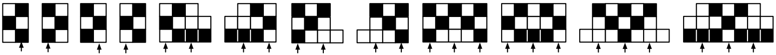
Phase $\alpha \geq 1 - \epsilon$ (where $\epsilon = 0.187 \times 10^{-13} > 0$)



Une cellule est **contrainte** si l'une de ces voisines correspond à l'un des sites du cluster ouvert.

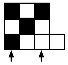
Phase $\alpha \geq 1 - \epsilon$ (where $\epsilon = 0.187 \times 10^{-13} > 0$)

On regroupe les cellules contraintes par paquet tel qu'il existe toujours une séquence de mise à jour qui permet aux cellules contraintes d'avoir une voisine dans un état différent du leur au bout de deux pas de temps.



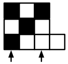
Phase $\alpha \geq 1 - \epsilon$ (where $\epsilon = 0.187 \times 10^{-13} > 0$)

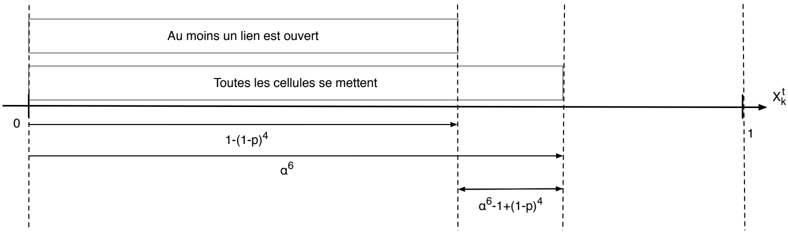
Le couplage est effectué sur chaque paquet. Exemple du paquet :



Phase $\alpha \geq 1 - \epsilon$ (where $\epsilon = 0.187 \times 10^{-13} > 0$)

Le couplage est effectué sur chaque paquet. Exemple du paquet :





Phase $\alpha \geq 1 - \epsilon$ (where $\epsilon = 0.187 \times 10^{-13} > 0$)

Theorem

Si $\alpha \geq \sqrt[12]{1-(1-p)^6}$ alors il est possible de définir un couplage vérifiant le critère de correspondance.

Theorem

Considérons une séquence de configuration $(c^t)_{t\geq 0}$ évoluant selon la règle Flip-If-Not-All-Zero *en dynamique α-asynchrone et où c^0 est une configuration* 01 *alternée, si $\alpha \geq \sqrt[12]{1-(1-(\frac{16^2-1}{16^2})^2)^6}$ alors $\mathbb{E}[T] = \Omega(2^n)$.*

Conclusion

- Preuve d'une transition de phase dans les automates cellulaires asynchrones.
- Il manque un argument pour étendre ce résultat à Minorité (deux configurations stables au lieu d'une seule).
- Nous utilisons un couplage avec la percolation dirigée mais Minorité est un processus différent.