Rencontres autour des Automates Cellulaires Probabilistes

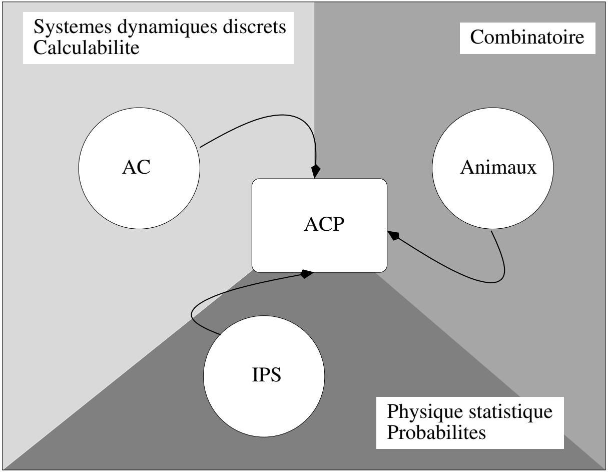
Jean Mairesse & Irène Marcovici

LIAFA, Université Paris Diderot (Paris 7) & CNRS
Avec le soutien de l'ANR Magnum

10-11 janvier 2013

Qui s'intéresse aux ACP ?

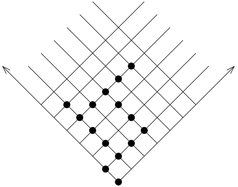
Qui s'intéresse aux ACP ?



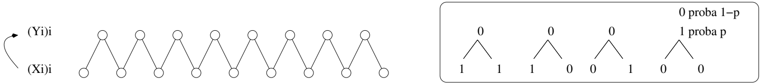
Du côté de la combinatoire

Du côté de la combinatoire

Animaux dirigés: AD

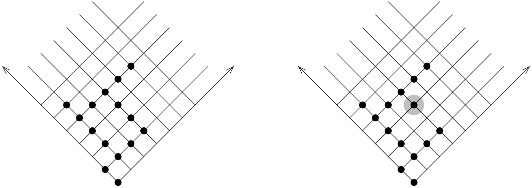


"Automate cellulaire probabiliste"

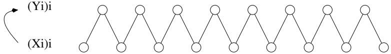


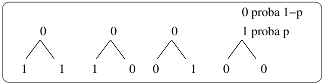
Du côté de la combinatoire

Animaux dirigés: AD



"Automate cellulaire probabiliste"





Série génératrice des AD: $S = \sum_{u \in AD} x^{|u|}$.
Mesure invariante de l'ACP: π, $(X_i)_i \simeq \pi \implies (Y_i)_i \simeq \pi$.

Du côté des probabilités

Du côté des probabilités

Dynamique aléatoire sur l'espace d'états $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ (ou $A^{\mathbb{Z}}$) avec des interactions locales, et de l'homogénéité en temps et en espace.

Du côté des probabilités

Dynamique aléatoire sur l'espace d'états $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ (ou $A^{\mathbb{Z}}$) avec des interactions locales, et de l'homogénéité en temps et en espace.

- Dynamique asynchrone (temps continu).
- Dynamique synchrone (temps discret)

Du côté des probabilités

Dynamique aléatoire sur l'espace d'états $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ (ou $A^{\mathbb{Z}}$) avec des interactions locales, et de l'homogénéité en temps et en espace.

- Dynamique asynchrone (temps continu).
- Dynamique synchrone (temps discret)

Asynchrone : **Systèmes de particules en interaction (SPI)**
[Processus markovien à temps continu sur $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$]

Du côté des probabilités

Dynamique aléatoire sur l'espace d'états $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ (ou $A^{\mathbb{Z}}$) avec des interactions locales, et de l'homogénéité en temps et en espace.

- Dynamique asynchrone (temps continu).
- Dynamique synchrone (temps discret)

Asynchrone : **Systèmes de particules en interaction (SPI)**
[Processus markovien à temps continu sur $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$]

Synchrone : **Automates Cellulaires Probabilistes (ACP)**
[Chaîne de Markov sur $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$]

Du côté des probabilités

Dynamique aléatoire sur l'espace d'états $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ (ou $A^{\mathbb{Z}}$) avec des interactions locales, et de l'homogénéité en temps et en espace.

- Dynamique asynchrone (temps continu).
- Dynamique synchrone (temps discret)

Asynchrone : **Systèmes de particules en interaction (SPI)**
[Processus markovien à temps continu sur $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$]

Synchrone : **Automates Cellulaires Probabilistes (ACP)**
[Chaîne de Markov sur $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$]

Modèles très étudiés : modèle du votant, modèle d'exclusion, modèle de contact (épidémie), dynamique de Glauber du modèle d'Ising, ...

Du côté des systèmes dynamiques et de l'informatique

Alphabet :$\{0,1\}$. Sites : $\mathbb{Z}$. Configurations : $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$.

Definition (Automate cellulaire)

Etant donné un ensemble fini $\mathcal{N} \subset \mathbb{Z}$ et une application $f : \{0,1\}^{\mathcal{N}} \to \{0,1\}$, l'**automate cellulaire (AC)** de *voisinage* $\mathcal{N}$ et de *règle locale* f est l'application $F : \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ definie par :

$$\forall x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}, \forall k \in \mathbb{Z}, \quad F(x)_k = f((x_{k+v})_{v \in \mathcal{N}}).$$

Du côté des systèmes dynamiques et de l'informatique

Alphabet :$\{0,1\}$. Sites : $\mathbb{Z}$. Configurations : $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$.

Definition (Automate cellulaire)

Etant donné un ensemble fini $\mathcal{N} \subset \mathbb{Z}$ et une application $f : \{0,1\}^{\mathcal{N}} \to \{0,1\}$, l'**automate cellulaire (AC)** de *voisinage* $\mathcal{N}$ et de *règle locale* f est l'application $F : \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ definie par :

$$\forall x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}, \forall k \in \mathbb{Z}, \quad F(x)_k = f((x_{k+v})_{v \in \mathcal{N}}).$$

Example. $\mathcal{N} = (0,1)$, $f(a,b) = a + b \mod 2, F(x)_n = x_n + x_{n+1}$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} F(x) & = & \cdots & . & . & ? & . & . & . & . & \cdots \\ x & = & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots \end{array}$$

Du côté des systèmes dynamiques et de l'informatique

Alphabet :$\{0,1\}$. Sites : $\mathbb{Z}$. Configurations : $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$.

Definition (Automate cellulaire)

Etant donné un ensemble fini $\mathcal{N} \subset \mathbb{Z}$ et une application $f : \{0,1\}^{\mathcal{N}} \to \{0,1\}$, l'**automate cellulaire (AC)** de *voisinage* $\mathcal{N}$ et de *règle locale* f est l'application $F : \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ definie par :

$$\forall x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}, \forall k \in \mathbb{Z}, \quad F(x)_k = f((x_{k+v})_{v\in\mathcal{N}}).$$

Example. $\mathcal{N} = (0,1)$, $f(a,b) = a + b \mod 2, F(x)_n = x_n + x_{n+1}$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} F(x) & = & \cdots & . & . & \color{red}{?} & . & . & . & . & \cdots \\ x & = & \cdots & 0 & 1 & \color{red}{0} & \color{red}{1} & 1 & 0 & 1 & \cdots \end{array}$$

Du côté des systèmes dynamiques et de l'informatique

Alphabet :$\{0,1\}$. Sites : $\mathbb{Z}$. Configurations : $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$.

Definition (Automate cellulaire)

Etant donné un ensemble fini $\mathcal{N} \subset \mathbb{Z}$ et une application $f : \{0,1\}^{\mathcal{N}} \to \{0,1\}$, l'**automate cellulaire (AC)** de *voisinage* $\mathcal{N}$ et de *règle locale* f est l'application $F : \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ definie par :

$$\forall x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}, \forall k \in \mathbb{Z}, \quad F(x)_k = f((x_{k+v})_{v\in\mathcal{N}}).$$

Example. $\mathcal{N} = (0,1)$, $f(a,b) = a + b \mod 2, F(x)_n = x_n + x_{n+1}$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} F(x) & = & \cdots & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ x & = & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots \end{array}$$

Du côté des systèmes dynamiques et de l'informatique

Alphabet :$\{0,1\}$. Sites : $\mathbb{Z}$. Configurations : $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$.

Definition (Automate cellulaire)

Etant donné un ensemble fini $\mathcal{N} \subset \mathbb{Z}$ et une application $f : \{0,1\}^{\mathcal{N}} \to \{0,1\}$, l'**automate cellulaire (AC)** de *voisinage* $\mathcal{N}$ et de *règle locale* f est l'application $F : \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ definie par :

$$\forall x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}, \forall k \in \mathbb{Z}, \quad F(x)_k = f((x_{k+v})_{v \in \mathcal{N}}).$$

Example. $\mathcal{N} = (0,1)$, $f(a,b) = a + b \mod 2, F(x)_n = x_n + x_{n+1}$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} F(x) & = & \cdots & \cdot & \cdot & 1 & \color{red}{0} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ x & = & \cdots & 0 & 1 & 0 & \color{red}{1} & \color{red}{1} & 0 & 1 & \cdots \end{array}$$

Du côté des systèmes dynamiques et de l'informatique

Triple point de vue :

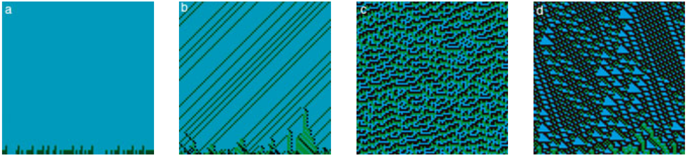
- Système dynamique discret.
- Systèmes complexes.
- Modèle de calcul.

Du côté des systèmes dynamiques et de l'informatique

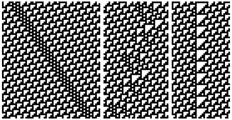
- Système dynamique discret. Théorème d'Hedlund.

$$F \text{ continu et commute avec le décalage } \iff F \text{ AC }.$$

- Systèmes complexes. Classification des 2^{2^3} AC élémentaires.



- Modèle de calcul. Universalité Turing.



Du côté des systèmes dynamiques et de l'informatique

$\mathcal{M}(E)$: l'ensemble des mesures de probabilité sur E.

Definition (Automate Cellulaire Probabiliste)

Etant donné un ensemble fini $\mathcal{N} \subset \mathbb{Z}$ et une application $f : \{0,1\}^{\mathcal{N}} \to \mathcal{M}(\{0,1\}^{\mathbb{Z}})$, l'**automate cellulaire probabiliste (ACP)** de *voisinage* $\mathcal{N}$ et de *règle locale* f est l'application $F : \mathcal{M}(\{0,1\}^{\mathbb{Z}}) \to \mathcal{M}(\{0,1\}^{\mathbb{Z}})$ définie de façon analogue.

Du côté des systèmes dynamiques et de l'informatique

Triple point de vue sur les ACP :

- Système dynamique discret.

$$F : \mathcal{M}(\{0,1\}^{\mathbb{Z}}) \to \mathcal{M}(\{0,1\}^{\mathbb{Z}}) .$$

- Systèmes complexes. Critère de classification des 256 AC élémentaires : sensibilité à l'aléa.

$$f : \{0,1\}^3 \to \{0,1\} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} \widehat{f} : \{0,1\}^3 \to \mathcal{M}(\{0,1\}) \\ \widehat{f} = (1-p)\delta_f + p\delta_{Id} . \end{array}$$

- Modèle de calcul. Capacité à calculer en présence de bruit.

$$f : \{0,1\}^{\mathcal{N}} \to \{0,1\} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} \widehat{f} : \{0,1\}^{\mathcal{N}} \to \mathcal{M}(\{0,1\}) \\ \widehat{f} = (1-\varepsilon)\delta_f + \varepsilon\delta_{1-f} . \end{array}$$

Les ACP sont-ils un modèle mathématique naturel ?

$$f : \mathcal{A}^k \longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

Les ACP sont-ils un modèle mathématique naturel ?

$$f : \mathcal{A}^k \longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

Spécialisation 1: $f : \mathcal{A}^k \longrightarrow \mathcal{A}$

Automate cellulaire

Dynamique symbolique. Théorème d'Hedlund.

$$F \text{ continu et commute avec le décalage} \iff F \text{ AC} .$$

Les ACP sont-ils un modèle mathématique naturel ?

$$f : \mathcal{A}^k \longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

Spécialisation 1: $f : \mathcal{A}^k \longrightarrow \mathcal{A}$

Automate cellulaire

Dynamique symbolique. Théorème d'Hedlund.

$$F \text{ continu et commute avec le décalage} \iff F \text{ AC}\,.$$

Spécialisation 2: $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$

Chaîne de Markov avec une espace d'état fini.

Variantes et extensions

Variantes et extensions

- Définition précise de F.

Variantes et extensions

- Définition précise de F.
- Changement de l'espace d'état.

$$\mathbb{Z} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{Z}^2,\ \mathbb{Z}^d,\ G, \ldots$$

Variantes et extensions

- Définition précise de F.
- Changement de l'espace d'état.

$$\mathbb{Z} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{Z}^2,\ \mathbb{Z}^d,\ G, \dots$$

- Espace d'état fini:

$$\mathbb{Z} \quad \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

  Chaîne de Markov à espace d'états fini. Deux variantes :
  (i) Actualisation indépendante des sites;
  (ii) Actualisation d'exactement 1 site par unité de temps.

Les exposés des Rencontres ACP

1. Combinatoire : Jean-François Marckert
2. Physique statistique, probabilités : Pierre-Yves Louis, Cristina Toninelli, Lise Poncelet
3. Systèmes dynamiques, informatique :
    1. SDD : Benjamin Hellouin de Menibus - Mathieu Sablik
    2. Systèmes complexes : Nazim Fatès, Olivier Bouré, Damien Regnault
    3. Modèle de calcul : Andrei Romaschenko, Guillaume Theyssier

Les exposés des Rencontres ACP

1. Combinatoire : Jean-François Marckert
2. Physique statistique, probabilités : Pierre-Yves Louis, Cristina Toninelli, Lise Poncelet
3. Systèmes dynamiques, informatique :
    1. SDD : Benjamin Hellouin de Menibus - Mathieu Sablik
    2. Systèmes complexes : Nazim Fatès, Olivier Bouré, Damien Regnault
    3. Modèle de calcul : Andrei Romaschenko, Guillaume Theyssier

- Session problèmes ouverts, vendredi 15.00 ... N'hésitez pas !

Informations diverses

- FRAC d'hiver, 28 février-1 mars 2013, Montpellier.
  Contact : Victor Poupet
- Workshop PCA, 10-12 juin 2013, Eindhoven, Pays-Bas.
  Contact : Pierre-Yves Louis.
- Projet ANR en cours de dépôt.
  Contact : Jean-François Marckert.