Caractérisation des mesures limites atteignables en itérant un automate cellulaire sur une mesure de probabilité.

Benjamin Hellouin de Menibus
collaboration avec Mathieu Sablik

Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités
Université d'Aix-Marseille

Rencontres ACP, LIAFA
11 janvier 2013

Définitions

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ des alphabets finis ;

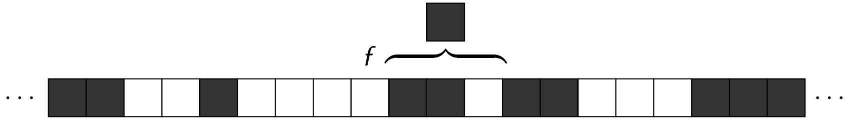
$\mathcal{A}^*$ l'ensemble des **mots (finis)** ;

$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des **configurations** ;

σ l'action de **décalage** $\sigma(a)_i = a_{i-1}$;

Un **automate cellulaire** (déterministe) $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \mapsto \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est une action définie par une **règle locale** $f : \mathcal{A}^{\mathbb{U}} \to \mathcal{A}$ sur un voisinage $\mathbb{U}$.

Pour $\mathcal{A} = \{\blacksquare, \square\}$ et $\mathbb{U} = \{-1, 0, 1\}$:

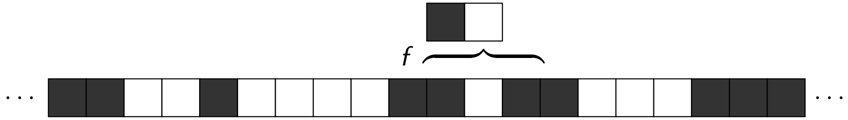


Définitions

- $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ des alphabets finis ;
- $\mathcal{A}^*$ l'ensemble des **mots (finis)** ;
- $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des **configurations** ;
- σ l'action de **décalage** $\sigma(a)_i = a_{i-1}$;

Un **automate cellulaire** (déterministe) $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \mapsto \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est une action définie par une **règle locale** $f : \mathcal{A}^{\mathbb{U}} \to \mathcal{A}$ sur un voisinage $\mathbb{U}$.

Pour $\mathcal{A} = \{\blacksquare, \square\}$ et $\mathbb{U} = \{-1, 0, 1\}$:



Définitions

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ des alphabets finis ;

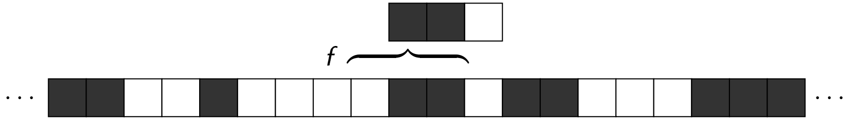
$\mathcal{A}^*$ l'ensemble des **mots (finis)** ;

$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des **configurations** ;

σ l'action de **décalage** $\sigma(a)_i = a_{i-1}$;

Un **automate cellulaire** (déterministe) $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \mapsto \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est une action définie par une **règle locale** $f : \mathcal{A}^{\mathbb{U}} \to \mathcal{A}$ sur un voisinage $\mathbb{U}$.

Pour $\mathcal{A} = \{\blacksquare, \square\}$ et $\mathbb{U} = \{-1, 0, 1\}$:



Définitions

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ des alphabets finis ;

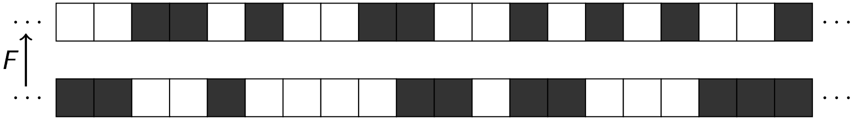
$\mathcal{A}^*$ l'ensemble des **mots (finis)** ;

$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des **configurations** ;

σ l'action de **décalage** $\sigma(a)_i = a_{i-1}$;

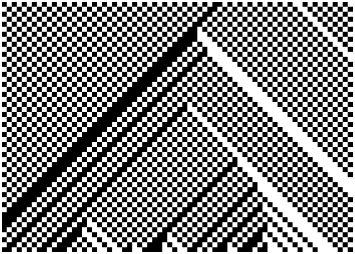
Un **automate cellulaire** (déterministe) $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \mapsto \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est une action définie par une **règle locale** $f : \mathcal{A}^{\mathbb{U}} \to \mathcal{A}$ sur un voisinage $\mathbb{U}$.

Pour $\mathcal{A} = \{■, □\}$ et $\mathbb{U} = \{-1, 0, 1\}$:

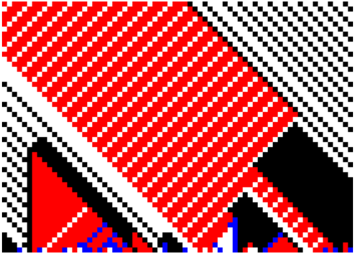


Simulations et comportement asymptotique

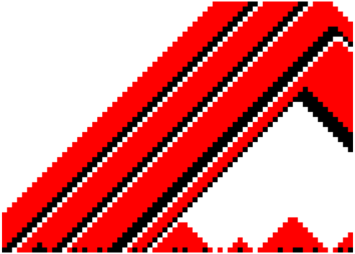
Automate du trafic



Automate captif



Automate cyclique à 3 états



Automate additif

Caractérisation des mesures limites atteignables en itérant un automate cellulaire sur une mesure de probabilité

Espace des mesures

$\mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^\mathbb{Z})$ l'ensemble des **mesures de probabilité σ-invariantes** sur $\mathcal{A}^\mathbb{Z}$.

$\mu([u])$ la probabilité d'apparition d'un mot $u \in \mathcal{A}^*$, pour $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^\mathbb{Z})$.

Exemples

Mesure de Bernoulli Soit $(\lambda_a)_{a\in\mathcal{A}}$ avec $\sum \lambda_a = 1$. $\boxed{\forall u \in \mathcal{A}^*, \mu([u]) = \prod_{i=0}^{|u|-1} \lambda_{u_i}.}$

Mesure de Dirac Pour $x \in \mathcal{A}^\mathbb{Z}$ et un borélien U, $\boxed{\delta_x(U) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in U\ ; \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}.}$

Mesure portée par un mot périodique Pour $w \in \mathcal{A}^*$, $\boxed{\widehat{\delta_w} = \frac{1}{|w|} \sum_{i=0}^{|w|-1} \delta_{\sigma^i(^\infty w^\infty)}.}$

Espace des mesures

$\mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^\mathbb{Z})$ l'ensemble des **mesures de probabilité σ-invariantes** sur $\mathcal{A}^\mathbb{Z}$.

$\mu([u])$ la probabilité d'apparition d'un mot $u \in \mathcal{A}^*$, pour $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^\mathbb{Z})$.

Exemples

Mesure de Bernoulli Soit $(\lambda_a)_{a\in\mathcal{A}}$ avec $\sum \lambda_a = 1$. $\boxed{\forall u \in \mathcal{A}^*, \mu([u]) = \prod_{i=0}^{|u|-1} \lambda_{u_i}.}$

Mesure de Dirac Pour $x \in \mathcal{A}^\mathbb{Z}$ et un borélien U, $\boxed{\delta_x(U) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in U\ ; \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}.}$

Mesure portée par un mot périodique Pour $w \in \mathcal{A}^*$, $\boxed{\widehat{\delta_w} = \frac{1}{|w|} \sum_{i=0}^{|w|-1} \delta_{\sigma^i({}^\infty w^\infty)}.}$

Proposition

Les mesures portées par des mots périodiques sont denses dans $\mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^\mathbb{Z})$.

Action d'un automate sur une mesure initiale

- F s'étend en une action $F_* : \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^\mathbb{Z}) \to \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^\mathbb{Z})$:

  Pour tout borélien U, $\boxed{F_*\mu(U) = \mu(F^{-1}U)}$

- Pour une mesure initiale $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^\mathbb{Z})$, la suite $(F_*^t\mu)_{t\in\mathbb{N}}$ représente la répartition au temps t ;
- Le comportement asymptotique est bien décrit par $\mathcal{V}(F, \mu)$ **l'ensemble de valeurs d'adhérence** de $(F_*^t\mu)_{t\in\mathbb{N}}$ dans la topologie faible-*.

Action d'un automate sur une mesure initiale

- F s'étend en une action $F_* : \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^\mathbb{Z}) \to \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^\mathbb{Z})$:

  Pour tout borélien U, $\boxed{F_*\mu(U) = \mu(F^{-1}U)}$

- Pour une mesure initiale $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^\mathbb{Z})$, la suite $(F_*^t\mu)_{t\in\mathbb{N}}$ représente la répartition au temps t ;
- Le comportement asymptotique est bien décrit par $\mathcal{V}(F,\mu)$ **l'ensemble de valeurs d'adhérence** de $(F_*^t\mu)_{t\in\mathbb{N}}$ dans la topologie faible-*.

Si on tire la configuration initiale suivant μ et que $F_*^t\mu \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \nu$,

la probabilité d'apparition d'un mot u tend vers $\nu([u])$.

Caractérisation du support

Pour $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$, on définit l'**ensemble μ-limite** de F :

$$\boxed{\Lambda_\mu(F) = \bigcup_{\nu \in \mathcal{V}(F,\mu)} \mathrm{supp}(\nu)}$$

[Kurka, Maass 00].

Alternativement,

$$x \in \Lambda_\mu(F) \Leftrightarrow \text{Pour tout mot } u \text{ de } x,\ F_*^t\mu([u]) \not\to 0.$$

Caractérisation du support

Pour $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^\mathbb{Z})$, on définit l'**ensemble μ-limite** de F :

$$\boxed{\Lambda_\mu(F) = \bigcup_{\nu \in \mathcal{V}(F,\mu)} \mathrm{supp}(\nu)}$$

[Kurka, Maass 00].

Alternativement,

$$x \in \Lambda_\mu(F) \Leftrightarrow \text{Pour tout mot } u \text{ de } x,\ F_*^t\mu([u]) \not\to 0.$$

Caractérisation du support

Pour $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$, on définit l'**ensemble μ-limite** de F :

$$\boxed{\Lambda_\mu(F) = \bigcup_{\nu \in \mathcal{V}(F,\mu)} \mathrm{supp}(\nu)}$$

[Kurka, Maass 00].

Alternativement,

$$x \in \Lambda_\mu(F) \Leftrightarrow \text{Pour tout mot } u \text{ de } x,\ F_*^t\mu([u]) \not\to 0.$$

Exemple

Soit F l'automate cyclique à trois états et $\mu = Ber\,(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$.

$$\Lambda_\mu(F) = \{{}^\infty\square^\infty, {}^\infty\blacksquare^\infty, {}^\infty{\color{red}\blacksquare}^\infty\}$$

Caractérisation du support

Pour $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^\mathbb{Z})$, on définit l'**ensemble μ-limite** de F :

$$\boxed{\Lambda_\mu(F) = \bigcup_{\nu \in \mathcal{V}(F,\mu)} \mathrm{supp}(\nu)}$$

[Kurka, Maass 00].

Alternativement,

$$x \in \Lambda_\mu(F) \Leftrightarrow \text{Pour tout mot } u \text{ de } x,\ F_*^t\mu([u]) \not\to 0.$$

Théorème [Boyet, Poupet, Theyssier 06]

Il existe un automate F tel que **le langage de $\boldsymbol{\Lambda_\mu(F)}$ est non récursif** pour toute mesure de Bernoulli non dégénérée μ.

Théorème [Boyer, Delacourt, Sablik 10]

Soit μ la mesure de Bernouilli uniforme. Pour une large classe d'ensembles $U \subset \mathcal{A}^\mathbb{Z}$, il existe un automate F tel que $\boldsymbol{\Lambda_\mu(F) = U}$.

Automate cyclique

Théorème [H.,Sablik 12]

Soit F l'automate cyclique à 3 états et $\mu = Ber(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$. Alors

$$F_*^t\mu \to \lambda_2\widehat{\delta_0} + \lambda_0\widehat{\delta_1} + \lambda_1\widehat{\delta_2}.$$

Automate additif

Théorème [Lind 84]

Soit F l'automate de l'addition $\mod 2$ et μ dans une large classe de mesures initiales. Alors

$$\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n} F_*^t\mu \to Ber\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Automate additif

Théorème [Ferrari, Martinez, Maass 00]

Soit F un automate algébrique et μ dans une large classe de mesures initiales. Alors

$$\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n} F_*^t\mu \to Ber\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Automate additif

Théorème [Pivato,Yassawi 02]

Soit F un automate affine et μ dans une large classe de mesures initiales. Alors

$$\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n} F_*^t\mu \to Ber\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Problématique

Question

Soit $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^\mathbb{Z})$ une mesure simple (e.g. la mesure de Bernoulli uniforme). Peut-on **caractériser les ensembles $\boldsymbol{\mathcal{V}} \subset \boldsymbol{\mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^\mathbb{Z})}$** pour lesquels il existe un automate $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tel que $\boldsymbol{\mathcal{V}(F,\mu) = \mathcal{V}}$?

Obstruction topologique

L'ensemble de valeurs d'adhérence de $(F_*^t\mu)_{t\in\mathbb{N}}$ est non vide et **compact**.

Mesures et calculabilité

$f : X \to Y$ est dite **calculable** s'il existe une machine de Turing qui, sur toute entrée $x \in X$, termine et renvoie $f(x)$ (à encodage près) ;

Une mesure μ est dite :

calculable s'il existe une fonction calculable $f : \mathcal{A}^* \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ telle que

$$|\mu([u]) - f(u,n)| < 2^{-n}$$

Exemples

- Toute mesure portée par un mot périodique ;
- Les mesures de Bernoulli dont les paramètres sont calculables.

récursivement calculable si elle est limite d'une suite effective de mesures calculables :

$$\exists \mu_i \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}), f : \mathbb{N} \times \mathcal{A}^* \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, |\mu_i([u]) - f(i,u,n)| < 2^{-n}$$

Obstruction de calculabilité

Action d'un automate cellulaire sur une mesure calculable :

- Si μ est calculable, alors $F_*^t\mu$ est **calculable** ;
- Si μ est calculable et que $F_*^t\mu \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \nu$, alors ν est **récursivement calculable**.

Peut-on étendre cette obstruction de calculabilité à l'ensemble de valeurs d'adhérence ?

Ensembles compacts et calculabilité

Posons :

$$d_{\mathcal{M}}(\mu_1, \mu_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \max_{u \in \mathcal{A}^n} |\mu_1([u]) - \mu_2([u])|$$

Alors on définit la **calculabilité d'un ensemble compact** $\mathcal{V}$ par la calculabilité de la fonction distance associée $d_{\mathcal{V}} : \mu \to \min_{\nu \in \mathcal{V}} d_{\mathcal{M}}(\mu, \nu)$.

$$\mathcal{V} \text{ calculable} \quad \Leftrightarrow \quad d_{\mathcal{V}} : \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}) \mapsto \mathbb{R} \text{ calculable}$$

Ensembles compacts et calculabilité

Posons :

$$d_{\mathcal{M}}(\mu_1, \mu_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \max_{u \in \mathcal{A}^n} |\mu_1([u]) - \mu_2([u])|$$

Alors on définit la **calculabilité d'un ensemble compact** $\mathcal{V}$ par la calculabilité de la fonction distance associée $d_{\mathcal{V}} : \mu \to \min_{\nu \in \mathcal{V}} d_{\mathcal{M}}(\mu, \nu)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} \text{ calculable} \quad &\Leftrightarrow \quad d_{\mathcal{V}} : \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}) \mapsto \mathbb{R} \text{ calculable} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists f : \mathcal{A}^* \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Q} \text{ calculable}, \\
&\qquad\qquad |d_{\mathcal{V}}(\widehat{\delta_w}) - f(w, n)| \leq \frac{1}{2^n} \\
&\qquad \text{et } \exists b : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Q} \text{ calculable}, \\
&\qquad d_{\mathcal{M}}(\mu_1, \mu_2) < b(m) \Rightarrow |f(\mu_1, n) - f(\mu_2, n)| \leq \frac{1}{2^m}
\end{aligned}$$

Ensembles compacts et calculabilité

Posons :

$$d_{\mathcal{M}}(\mu_1, \mu_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \max_{u \in \mathcal{A}^n} |\mu_1([u]) - \mu_2([u])|$$

Alors on définit la **calculabilité d'un ensemble compact** $\mathcal{V}$ par la calculabilité de la fonction distance associée $d_{\mathcal{V}} : \mu \to \min_{\nu \in \mathcal{V}} d_{\mathcal{M}}(\mu, \nu)$.

$$\mathcal{V}\ \Sigma_2\text{-calculable} \quad \Leftrightarrow \quad d_{\mathcal{V}} = \liminf d_i$$

où d_i est une suite d'éléments $\mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}) \mapsto \mathbb{R}$
avec $\exists f : \mathbb{N} \times \mathcal{A}^* \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Q}$ calculable,

$$|d_i(\widehat{\delta_w}) - f(i, w, n)| \leq \frac{1}{2^n}$$

et $\exists b : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Q}$ calculable,

$$d_{\mathcal{M}}(\mu_1, \mu_2) < b(m) \Rightarrow |d_i(\mu_1) - d_i(\mu_2)| \leq \frac{1}{2^m}$$

Obstruction de calculabilité, deuxième partie

Action d'un automate cellulaire sur une mesure calculable :

- Si μ est calculable, alors $F_*^t\mu$ est **calculable** ;
- Si μ est calculable et que $\mathcal{V}(F,\mu) = \mathcal{V}$,
  alors $\mathcal{V}$ est non-vide, compact et $\mathbf{\Sigma_2}$**-calculable**.

En effet, $d_{\mathcal{V}} = \liminf d_{\mathcal{M}}(F_*^t\mu, .)$ et on peut vérifier les conditions.

Approximation par des mesures périodiques

Proposition

- Si $\nu \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^\mathbb{Z})$ est récursivement calculable, il existe $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite calculable de mots telle que $\boldsymbol{\widehat{\delta_{w_n}} \to \nu}$.
- Si $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^\mathbb{Z})$ est non vide et Σ_2-calculable, il existe $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite calculable de mots telle que **$\boldsymbol{\mathcal{V}}$ est l'ensemble de valeurs d'adhérence de $\boldsymbol{(\widehat{\delta_{w_n}})_{n\in\mathbb{N}}}$**.

Donc, étant donnée une telle suite, on veut calculer successivement chaque w_n puis approcher la mesure $\widehat{\delta_{w_n}}$ en recopiant des copies concaténées de w_n sur toute la configuration.

Ainsi, l'automate approchera successivement chaque mesure $\widehat{\delta_{w_n}}$ et on aura bien $\mathcal{V}(F,\mu) = F$.

Calcul

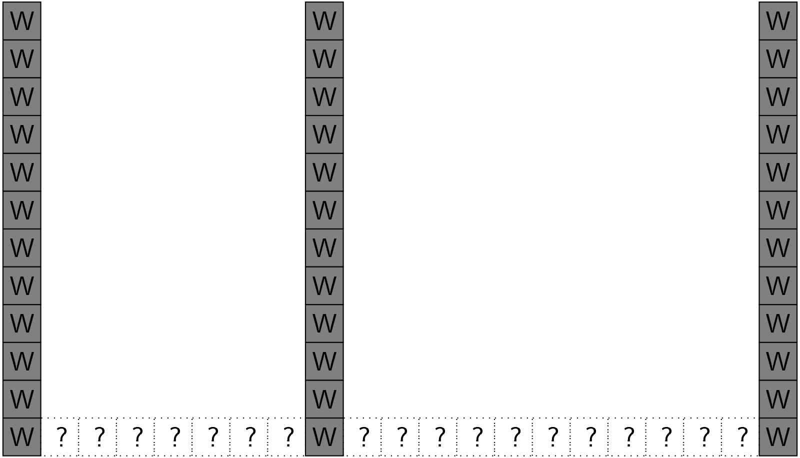
Pour calculer successivement chaque w_n, on doit simuler la machine de Turing associée dans l'automate. Pour cela, **on doit utiliser des états auxiliaires.**

Chaque case contient :

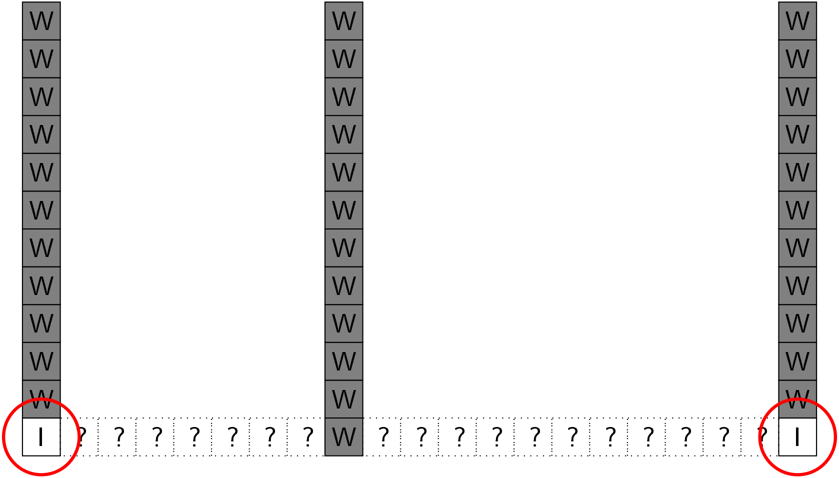
- le contenu de la case du ruban correspondante ;
- pour la case où se trouve la tête de lecture, l'état actuel de la machine.

et l'évolution temporelle est gouvernée par les régles d'évolution de la machine.

Initialisation



Initialisation



Contraintes de construction

- But : calculer chaque w_n en simulant une machine de Turing et le recopier dans le segment,
- de manière **synchrone** entre tous les segments.
- Nettoyer la configuration initiale (y compris les murs non initialisés).
- Diminuer la densité d'états auxiliaires en **fusionnant les segments**.

On sépare l'alphabet en couches :

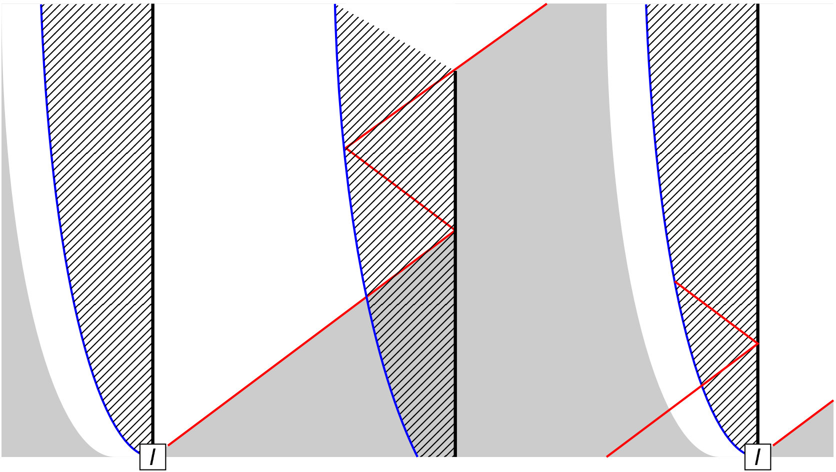
$\mathcal{B} = \{\boxed{\mathsf{I}}, \boxed{\mathsf{W}}\} \cup \mathcal{A}_{\mathtt{sortie}} \times \mathcal{A}_{\mathtt{temps}} \times \mathcal{A}_{\mathtt{balai}} \times \mathcal{A}_{\mathtt{calcul}} \times \mathcal{A}_{\mathtt{copie}} \times \mathcal{A}_{\mathtt{fusion}}$ où
$\mathcal{A}_{\mathtt{sortie}} = \mathcal{A} \cup \#$ est la couche où w_n est recopié.

On identifie $(b, \#, \#, \#, \#, \#) \leftrightarrow b$.

Compteur de temps

?	?	?	?	#	1	0	2	W
?	?	?	?	?	#	2	1	W
?	?	?	?	?	#	1	2	W
?	?	?	?	?	#	1	1	W
?	?	?	?	?	?	#	2	W
?	?	?	?	?	?	#	1	W
?	?	?	?	?	?	#	0	W
?	?	?	?	?	?	?	#	I

Panorama de l'initialisation



Compteur de balayage

W	#	#	Go 1	Go #	Go 0	Go #	Go 2	#
W	#	#	#	Go 2	Go #	Go 1	#	?
W	#	#	Go 1	Go #	Go 2	#	?	?
W	#	Go 1	Go #	Go 1	#	?	?	?
W	#	#	Go 2	#	?	?	?	?
W	#	Go 1	#	?	?	?	?	?
W	Go 0	#	?	?	?	?	?	?
I	?	?	?	?	?	?	?	?

état

valeur

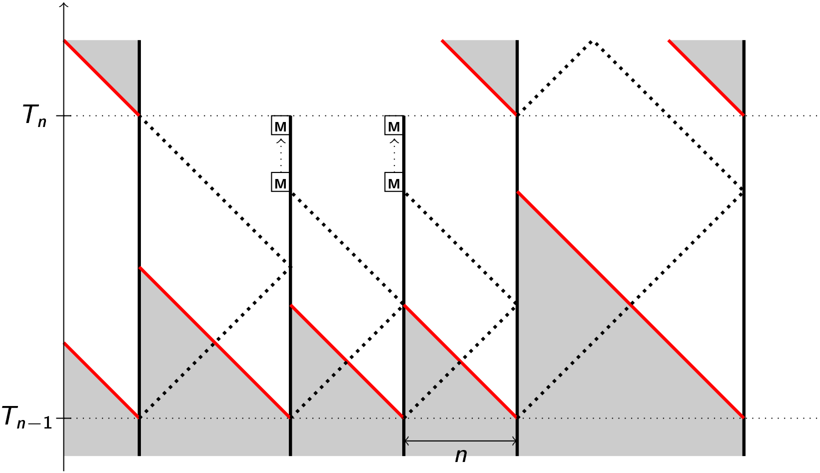
Comparaisons

#	#	#	#	=	Go	#	Go
#	#	#	#	=	–	Go	W
#	#	#	#	=	–	–	W
#	#	#	#	=	–	Stop	W
#	#	#	#	=	Stop	Stop	W
#	#	#	#	Stop	Stop	Stop	W
#	#	#	Go	#	Stop	Stop	W
#	#	Go	#	Go	#	Stop	W
#	Go	#	Go	#	Go	#	W

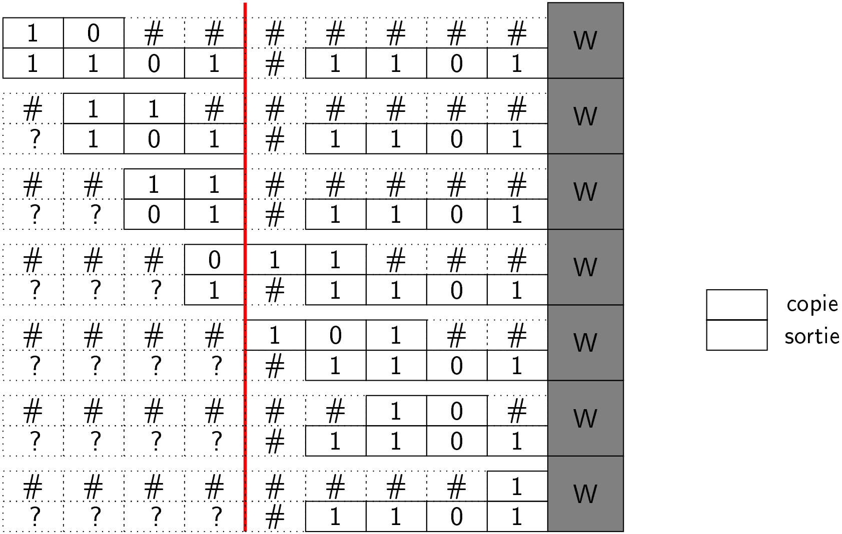
Fusion et copie

On définit une suite de temps T_n où le calcul de w_n doit être terminé :

1. les segments de taille n fusionnent avec leur voisin de gauche ;
2. sinon, w_n (calculé entre T_{n-1} et T_n) est recopié sur le segment.



Processus de copie



Hypothèses sur la mesure initiale

Pour une séquence T_n bien choisie :

1. le calcul de w_n prend moins de $T_{n+1} - T_n$ étapes ;
2. la fréquence d'apparition d'états auxiliaires tend vers 0 (à vitesse $O\left(\frac{1}{\log t}\right)$) ;

Pour garantir la convergence, on a besoin de plus d'informations sur la taille initiale des segments.

La mesure initiale μ est dite :

ergodique si

$$\boxed{\mu(B) = 0 \text{ ou } 1}$$

pour tout borélien B tel que $\sigma(B) = B$ presque partout.

ψ-mélangeante si

$$\boxed{\sup \left| \frac{\mu(\sigma^n(A) \cap B)}{\mu(A) \cdot \mu(B)} - 1 \right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0}$$

où le sup porte sur les $A \in \mathcal{B}_{[0,+\infty]}, B \in \mathcal{B}_{[-\infty,0]}$ non négligeables.

Résultat principal

Soit $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^\mathbb{Z})$ un ensemble non vide, compact, Σ_2-calculable et **connexe**.

Theorème

Il existe :

- un alphabet $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$
- un automate cellulaire $F : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$

tels que, pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{B}^\mathbb{Z})$ ψ-**mélangeante** et **de support plein**,

$$\boxed{\mathcal{V}(F, \mu) = \mathcal{V}}$$

Résultat principal

Soit $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$ un ensemble non vide, compact, Σ_2-calculable et **connexe**.

Theorème

Il existe :

- un alphabet $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$
- un automate cellulaire $F : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$

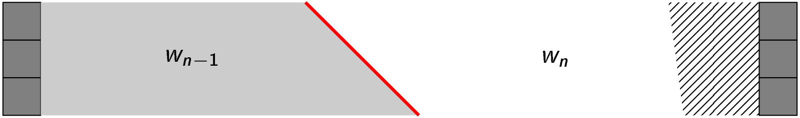
tels que, pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{B}^{\mathbb{Z}})$ ψ**-mélangeante** et **de support plein**,

$$\boxed{\mathcal{V}(F, \mu) = \mathcal{V}}$$

Si $\mathcal{V} = \{\nu\}$ et que ν est **récursivement calculable**, le théorème reste valable lorsque μ est **ergodique** et **de support plein**.

Hypothèse de connexité

En approchant chaque mesure $\widehat{\delta_{w_n}}$ successivement, notre construction "trace" le segment $[\widehat{\delta_{w_n}}, \widehat{\delta_{w_{n+1}}}]$ dû au caractère progressif de la copie.

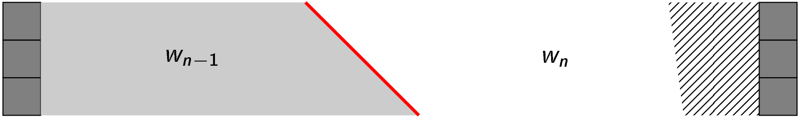


- Pour $\mathcal{V}$ convexe, le résultat est immédiat ;
- Pour $\mathcal{V}$ connexe, on peut intercaler des éléments supplémentaires.

Problématique : pour supprimer l'hypothèse de connexité, il est nécessaire de "sauter" d'une mesure à l'autre en une seule étape.

Hypothèse de connexité

En approchant chaque mesure $\widehat{\delta_{w_n}}$ successivement, notre construction "trace" le segment $[\widehat{\delta_{w_n}}, \widehat{\delta_{w_{n+1}}}]$ dû au caractère progressif de la copie.



- Pour $\mathcal{V}$ convexe, le résultat est immédiat ;
- Pour $\mathcal{V}$ connexe, on peut intercaler des éléments supplémentaires.

Problématique : pour supprimer l'hypothèse de connexité, il est nécessaire de "sauter" d'une mesure à l'autre en une seule étape.

Théorème

Il existe un automate F tel que, pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{B}^{\mathbb{Z}})$ ψ-mélangeante et de support plein,

$$\boxed{\mathcal{V}(F,\mu) \text{ comprend } \textbf{une infinité de composantes connexes.}}$$

Une caractérisation complète semble hors de portée par cette méthode.

Moyenne de Césàro

Soit $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^\mathbb{Z})$ deux ensembles non vides, compacts, Σ_2-calculables et **connexes**.

Théorème

Alors il existe :

- un alphabet $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$
- un automate cellulaire $F : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$

tels que, pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{B}^\mathbb{Z})$ ψ-**mélangeante** et **de support plein**,

L'ensemble de valeurs d'adhérence de	$F_*^t\mu$	**est** $\mathcal{V}$
de	$\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n} F_*^t\mu$	**est** $\mathcal{V}'$.

- La connexité de $\mathcal{V}'$ est une condition nécessaire ;
- Peut-on affaiblir l'hypothèse en $\mathcal{V}' \subset Conv(\mathcal{V})$?

Théorème de Rice sur les mesures limites

Théorème [Delacourt 11]

Toute propriété non triviale sur l'ensemble μ-limite d'un automate cellulaire, où μ est la mesure de Bernoulli uniforme, est **indécidable**.

Théorème de Rice sur les mesures limites

Théorème [Delacourt 11]

Toute propriété non triviale sur l'ensemble μ-limite d'un automate cellulaire, où μ est la mesure de Bernoulli uniforme, est **indécidable**.

Soit :

- $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$ une mesure ψ-mélangeante à support plein ;
- P une propriété non triviale sur les ensembles de mesures non vides, compacts, connexes, Σ_2 calculables ;

Théorème

Le problème de savoir, étant donné un automate F, si $\mathcal{V}(F, \mu)$ vérifie P, est **indécidable**.

Théorème de Rice sur les mesures limites

Théorème [Delacourt 11]

Toute propriété non triviale sur l'ensemble μ-limite d'un automate cellulaire, où μ est la mesure de Bernoulli uniforme, est **indécidable**.

Soit :

- $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$ une mesure ψ-mélangeante à support plein ;
- P une propriété non triviale sur les ensembles de mesures non vides, compacts, connexes, Σ_2 calculables ;

Théorème

Le problème de savoir, étant donné un automate F, si $\mathcal{V}(F, \mu)$ vérifie P, est **indécidable**.

- Ce théorème s'étend aux propriétés portant sur une unique mesure limite et pour la moyenne de Césàro

Calcul sur l'espace des mesures

- Plutôt que d'"oublier" la mesure initiale, on veut l'utiliser comme oracle durant les calculs.
- Les obstructions de calculabilité s'étendent naturellement avec oracle.
- Partant d'une mesure μ, peut-on atteindre tout ensemble non vide, compact, connexe, Σ_2-calculable **avec oracle μ ?**
- Plus généralement, quels **opérateurs** $\mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^\mathbb{Z}) \to \mathcal{P}(\mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^\mathbb{Z}))$ peut-on obtenir de cette façon ?

Calcul sur l'espace des mesures

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des mesures ψ-mélangeantes à support plein,
et φ **un opérateur $\boldsymbol{\mathcal{M}} \to \boldsymbol{\mathcal{P}(\mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}))}$** tel que :

- $\varphi(\mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}))$ ne contient que des ensembles non vides, compacts, connexes, Σ_2-calculables ;
- φ est Σ_2-calculable avec oracle dans $\mathcal{M}$;
- $\varphi(\mu)$ ne dépend que de $\mu([\boxed{\mathrm{I}}])$.

Calcul sur l'espace des mesures

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des mesures ψ-mélangeantes à support plein,
et φ **un opérateur $\mathcal{M} \to \mathcal{P}(\mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}))$** tel que :

- $\varphi(\mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}))$ ne contient que des ensembles non vides, compacts, connexes, Σ_2-calculables ;
- φ est Σ_2-calculable avec oracle dans $\mathcal{M}$;
- $\varphi(\mu)$ ne dépend que de $\mu([\boxed{\mid}])$.

Théorème

Il existe un automate F tel que, pour toute mesure μ ψ-mélangeante à support plein,

$$\boxed{\mathcal{V}(F,\mu) = \varphi(\mu)}$$

La clé est de conserver une partie de l'information contenue dans la mesure initiale.

Remarques sur l'implémentation

La preuve est constructive, mais :

- il faut construire une machine de Turing non triviale avec des contraintes en espace ;
- grand nombre d'états ;
  (si $|\mathcal{B}| = 2$, le nombre d'états est 2244 fois celui de la machine de Turing qui calcule w_n)
- la vitesse de convergence est au mieux $O\left(\frac{1}{\log t}\right)$, au sens de la distance définie précédemment.

Peut-on se passer d'états auxiliaires ?

On voudrait étendre les résultats précédents :

1. en partant d'une mesure initiale $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^\mathbb{Z})$ et avec un automate $F : \mathcal{B}^\mathbb{Z} \mapsto \mathcal{B}^\mathbb{Z}$, ou
2. avec un automate $F : \mathcal{A}^\mathbb{Z} \mapsto \mathcal{A}^\mathbb{Z}$.

Peut-on se passer d'états auxiliaires ?

On voudrait étendre les résultats précédents :

1. en partant d'une mesure initiale $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^\mathbb{Z})$ et avec un automate $F : \mathcal{B}^\mathbb{Z} \mapsto \mathcal{B}^\mathbb{Z}$, ou
2. avec un automate $F : \mathcal{A}^\mathbb{Z} \mapsto \mathcal{A}^\mathbb{Z}$.

Objection

Si $F_*^t\mu \to \nu$ où ν est une mesure à support plein, alors F est surjectif. En particulier, F laisse invariante la mesure de Bernoulli uniforme.

Peut-on se passer d'états auxiliaires ?

On voudrait étendre les résultats précédents :

1. en partant d'une mesure initiale $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}^\mathbb{Z})$ et avec un automate $F : \mathcal{B}^\mathbb{Z} \mapsto \mathcal{B}^\mathbb{Z}$, ou
2. avec un automate $F : \mathcal{A}^\mathbb{Z} \mapsto \mathcal{A}^\mathbb{Z}$.

Objection

Si $F_*^t\mu \to \nu$ où ν est une mesure à support plein, alors F est surjectif. En particulier, F laisse invariante la mesure de Bernoulli uniforme.

Travail en cours

On suppose l'existence d'un mot u qui n'est chargé par aucune mesure limite.

- La première extension est vraie ;
- La seconde extension est probablement vraie.

Perspectives

- Peut-on traiter le cas non connexe (en particulier pour un nombre fini de composantes connexes) ?
- et le cas $\mathcal{V}' \not\subset \mathcal{V}$ pour la moyenne de Césaro ?
- Peut-on parvenir à conserver une information "arbitrairement bonne" sur la mesure initiale, et généraliser le calcul dans l'espace des mesures ?
- Quelle est la richesse de comportements dynamiques des automates surjectifs ? et si l'automate est probabiliste ?