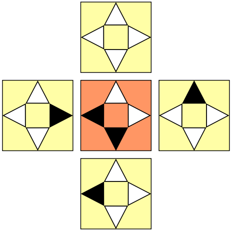
La robustesse pour étudier le comportement métastable d'un modèle discret de formation d'essaim

Olivier Bouré
équipe MaIA, LORIA, Université de Lorraine

Rencontre autour des automates cellulaires probabilistes

Lattice-Gas Cellular Automata (LGCA)

(fr: Automate cellulaire de gaz sur réseau)



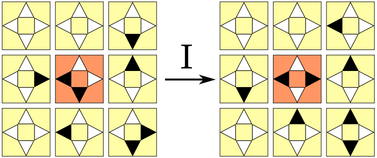
Les cellules sont connectées par des *canaux* à travers lesquels voyagent des *particules*.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^t(c) &= \text{état de } c \text{ au temps } t \\ &= [x_1; x_2; x_3; x_4] = [0; 1; 0; 1] \end{aligned}$$

LGCA	$\mathcal{A} = \{\mathcal{L}, \mathcal{N}, f_\mathrm{I}\}$
– la *grille*	$\mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^2$
– le *voisinage*	$\mathcal{N} = \{\overset{n_1}{(1,0)}; \overset{n_2}{(-1,0)}; \overset{n_3}{(0,1)}; \overset{n_4}{(0,-1)}\}$
– la *règle d'interaction*	f_I

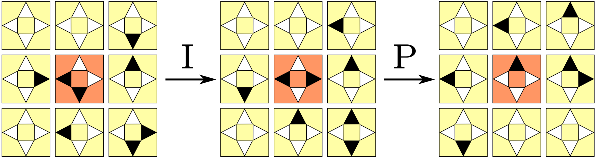
Mode d'itération des LGCA

1. Interaction : $\mathbf{x}^{\mathrm{I}}(c) = f_{\mathrm{I}}(\mathbf{x}^t(c), \mathbf{x}^t(c+n_1), \dots, \mathbf{x}^t(c+n_4))$



(fourni par le modèle)

2. Propagation : $\mathbf{x}^{t+1}(c) = \left(x_1^{\mathrm{I}}(c-n_1), \dots, x_4^{\mathrm{I}}(c-n_4)\right)$



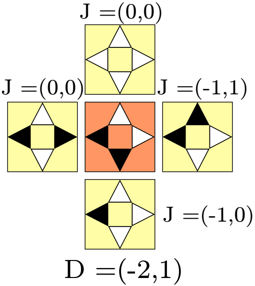
(déterministe)

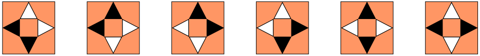
Règle d'interaction : favoriser l'alignement

Probabilité de $\mathbf{x}_c^{\mathrm{I}}$

$$P(\mathbf{x}_c \to \mathbf{x}_c^{\mathrm{I}}) = \frac{1}{Z}\exp\left[\alpha.\mathbf{J}_c(\mathbf{x}^{\mathrm{I}}) \cdot \mathbf{D}_c(\mathbf{x})\right]$$

$\mathbf{J}_c(\mathbf{x}) \to$ flux cellulaire c, $\mathbf{D}_c(\mathbf{x}) \to$ champ directeur c



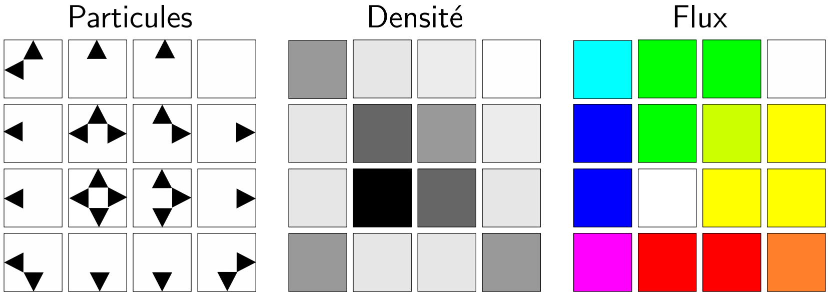


γ = 1, γ = 3, γ = -1, γ = -3, γ = 0, γ = 0

α	e^{α}	$e^{3\alpha}$	$e^{-\alpha}$	$e^{-3\alpha}$	e^{0}	e^{0}
0.5	1.65	4.48	0.06	0.02	1	1
1.5	4.48	90	0.02	0.01	1	1
4	54.6	10^{5}	0.01	10^{-6}	1	1

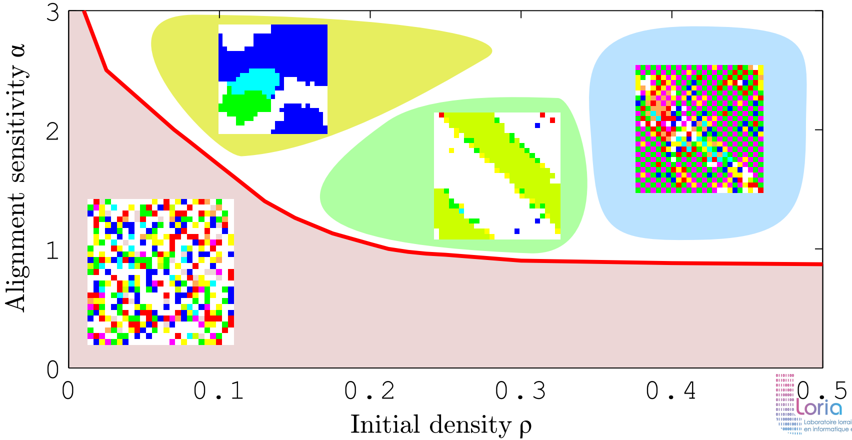
Loria Laboratoire lorrain de recherche en informatique et ses applications

Visualisation



Observation de motifs réccurrents

Comportements asymptotiques observés à partir de configurations initiales aléatoires :



Propriétés du système

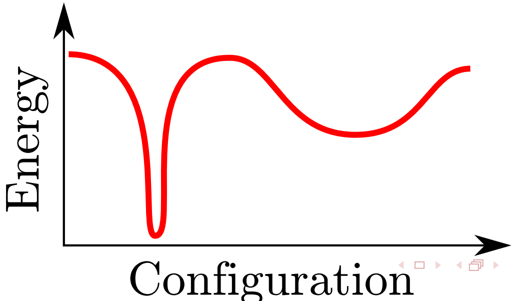
En grille finie :

- Le système est *ergodique*.
  - Toutes les configurations de densité ρ seront visistées un nombre infini de fois.

Propriétés du système

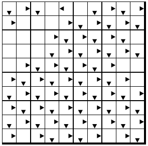
En grille finie :

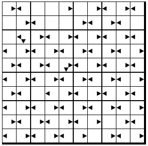
- Le système est *ergodique*.
  - Toutes les configurations de densité ρ seront visistées un nombre infini de fois.
- Les comportements sont *métastables*.
  - Il n' a pas de *point fixe*.
  - Tout état (ou motif) est temporaire.

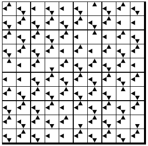


Robustesse à la définition de la grille cellulaire

- Pour des *petites* grilles :
  - Apparition de nouveaux motifs stables (artéfacts ?)







  - Stabilités des motifs relativisées

Robustesse à la définition de la grille cellulaire

- Pour des *petites* grilles :
  - Apparition de nouveaux motifs stables (artéfacts ?)
  - Stabilités des motifs relativisées
- Pour des grilles rectangulaires :
  - Altération de la bande diagonale

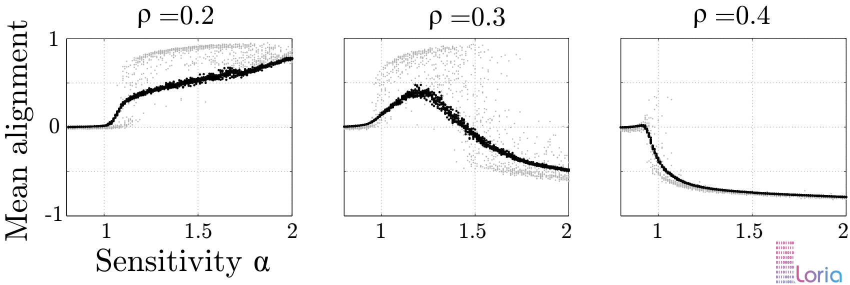
Robustesse à la définition de la grille cellulaire

- Pour des *petites* grilles :
  - Apparition de nouveaux motifs stables (artéfacts ?)
  - Stabilités des motifs relativisées
- Pour des grilles rectangulaires :
  - Altération de la bande diagonale
- Pour toute taille de la grille, on observera des comportements qui résultent d'effets de résonance sur des temps très longs.
- **Quid des grilles infinies ?**

Quid des grilles infinies ?

Visualisation de la transition avec l'alignement sur α pour

- $L = 100, t = 1000$ (points gris)
- $L = 1000, t = 1000$ (points noirs)



Thank you for your attention.

(Flock of common starlings above Rome)