



... les automates cellulaires

Depuis la publication en 1970 dans *Scientific American* d'un article évoquant le *jeu de la vie* [5], les automates cellulaires continuent à susciter une certaine fascination auprès du grand public. Mais comment expliquer qu'ils intéressent encore aujourd'hui des mathématiciennes et mathématiciens de différents horizons ? L'objet de cet article est d'apporter des éléments de réponse à cette question, au travers d'une sélection de thèmes provenant des systèmes dynamiques, de la théorie des nombres, et des probabilités.

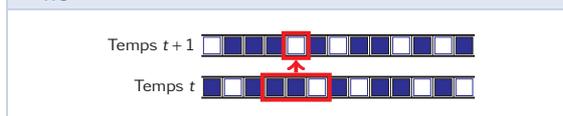
• I. MARCOVICI

Introduction

Considérons un réseau régulier (ruban infini dans le cas de la dimension 1, grille de dimension 2 ou plus), constitué de *cellules*, qui contiennent chacune un état parmi un ensemble fini d'états possibles. De manière informelle, l'action d'un *automate cellulaire* consiste à mettre à jour à chaque itération les états de toutes les cellules simultanément, en appliquant pour chaque cellule une même règle locale de mise à jour, qui dépend seulement de l'état de la cellule et de quelques-unes de ses voisines.

Un premier exemple d'automate cellulaire de dimension 1 est donné en figure 1. Il s'agit de la règle *trafic*, qui imite le mouvement de véhicules le long d'une route. Les cellules peuvent être dans deux états possibles : soit elles sont vides (carré blanc), soit elles sont occupées par un véhicule (carré bleu). À chaque pas de temps, tous les véhicules qui ont un espace libre devant eux avancent d'une position vers la droite. Ainsi, pour connaître l'état d'une cellule donnée au temps $t + 1$, il suffit de connaître son état au temps t ainsi que celui de ses deux voisines immédiates. On dit que l'automate cellulaire est de rayon 1.

FIGURE 1 – Exemple d'évolution de la règle trafic



Les automates cellulaires peuvent être vus

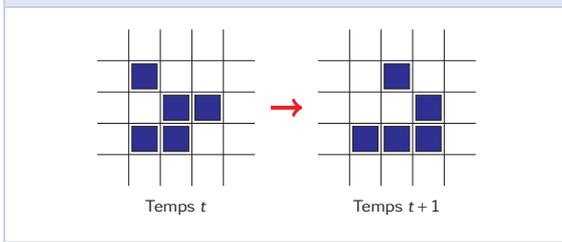
comme un modèle très simple de calcul parallèle. Ils ont été inventés à la fin des années 1940 par S. Ulam et J. von Neumann. Ce dernier cherchait à comprendre comment une machine pouvait s'auto-reproduire en suivant un procédé mécanique simple et répétitif.

J. H. Conway a ensuite introduit en 1970 un automate cellulaire appelé le *jeu de la vie*, qui a contribué à la popularisation des automates cellulaires. Celui-ci se déroule sur une grille bidimensionnelle, et les cellules n'ont que deux états possibles, vivant ou mort. À chaque pas de temps, l'évolution d'une cellule est déterminée par l'état de ses huit voisines avec les règles suivantes :

- une cellule morte possédant exactement trois voisines vivantes devient vivante (elle naît) ;
- une cellule vivante possédant deux ou trois voisines vivantes le reste, sinon elle meurt.

Un exemple d'évolution est montré en figure 2 (les cellules vivantes sont représentées par des carrés bleus, les cellules mortes par des carrés blancs). Malgré la simplicité de sa règle locale, l'évolution de cet automate cellulaire montre des comportements étonnants, avec l'apparition de structures qui évoquent une forme d'auto-organisation. Sur l'exemple donné en figure 2, après davantage d'itérations, on constate que le motif formé par les cellules bleues finit par se translater, mais cela n'a rien d'évident au vu des seules règles locales.

FIGURE 2 – Exemple d'évolution du jeu de la vie



À partir des années 1980, S. Wolfram a également contribué à faire connaître les automates cellulaires, avec de nombreuses publications visant à mettre en évidence leur capacité à expliquer des phénomènes physiques complexes.

Du côté des mathématiques, l'étude des automates cellulaires reste encore aujourd'hui un sujet de recherche actif. Nous verrons que les automates cellulaires constituent des systèmes dynamiques très naturels sur des espaces produits de la forme $S^{\mathbb{Z}^d}$, où S est un ensemble fini de symboles et d un entier strictement positif. Le contraste saisissant entre la simplicité de leur définition et la grande complexité des évolutions qu'ils engendrent en font un modèle de choix pour explorer la notion de systèmes dynamiques *chaotiques*. Nous montrerons que certains automates cellulaires présentent également un intérêt en théorie des nombres. Enfin, l'étude de l'évolution d'automates cellulaires à partir de configurations aléatoires soulève de nombreuses questions qui intéressent les probabilistes, et l'introduction d'aléa dans la règle locale permet d'enrichir le modèle.

1. Systèmes dynamiques

1.1 – Définition des automates cellulaires

Commençons par définir de manière plus formelle les automates cellulaires de dimension d , pour un entier $d \geq 1$. On fixe un ensemble fini S , qu'on peut voir comme une palette finie de couleurs. Les éléments de $S^{\mathbb{Z}^d}$ correspondent alors à des coloriage des cellules de la grille \mathbb{Z}^d avec les couleurs de S , et sont appelés des configurations de dimension d à valeurs dans S .

On se donne un entier $m \geq 1$, une famille de m éléments $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{Z}^d$, et une fonction

$$f : S^m \rightarrow S.$$

L'automate cellulaire de voisinage $\mathcal{N} = \{n_1, \dots, n_m\}$

et de règle locale f est la fonction

$$F : \begin{cases} S^{\mathbb{Z}^d} & \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d} \\ x & \mapsto F(x) \end{cases}$$

définie par

$$\forall x \in S^{\mathbb{Z}^d}, \forall k \in \mathbb{Z}^d, F(x)_k = f(x_{k+n_1}, \dots, x_{k+n_m}).$$

Pour déterminer la nouvelle couleur de la cellule k dans la configuration $F(x)$, on regarde donc les couleurs des cellules voisines de la cellule k dans la configuration x , et on applique la règle locale f au motif observé.

Reprenons ainsi l'exemple de l'automate cellulaire trafic. Son voisinage est l'ensemble $\mathcal{N} = \{-1, 0, 1\}$, et la transition représentée en rouge sur la figure 1 correspond à la valeur $f(1, 1, 0) = 0$, en codant un carré bleu par un 1 et un carré blanc par un 0. Pour le jeu de la vie, le voisinage est l'ensemble $\mathcal{N} = \{-1, 0, 1\}^2$, appelé aussi voisinage de Moore, et sur la figure 2, la valeur de la cellule centrale au temps $t + 1$ est donnée par :

$$f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

1.2 – Théorème de Curtis-Hedlund-Lyndon

L'espace $S^{\mathbb{Z}^d}$ muni de la topologie produit est un espace métrique compact. On peut par exemple définir une distance sur $S^{\mathbb{Z}^d}$ en posant, pour $x, y \in S^{\mathbb{Z}^d}$,

$$d(x, y) = 2^{-\min\{\|k\|_1 : x_k \neq y_k, k \in \mathbb{Z}^d\}}.$$

Il est alors facile de démontrer que les automates cellulaires sont des applications continues. Intuitivement, cela correspond à l'idée que si l'on veut que les images $F(x)$ et $F(y)$ de deux configurations x et y coïncident sur une grande fenêtre centrée en l'origine, il suffit que x et y coïncident sur une fenêtre un peu plus grande contenant les voisins de la fenêtre d'origine.

Pour un élément $\ell \in \mathbb{Z}^d$, on définit l'application de décalage $\sigma^\ell : S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d}$ par

$$\forall x \in S^{\mathbb{Z}^d}, \forall k \in \mathbb{Z}^d, (\sigma^\ell(x))_k = x_{k+\ell}.$$

On vérifie aisément que si F est un automate cellulaire, alors F commute avec tous les décalages : traduire la configuration d'un vecteur ℓ puis appliquer la règle locale à toutes les cellules donne le même résultat que si on commence par appliquer l'automate cellulaire avant de traduire la configuration. Le théorème de Curtis-Hedlund-Lyndon

donne une réciproque à cette observation, en affirmant que les automates cellulaires sont en fait les seules applications continues de $S^{\mathbb{Z}^d}$ vers $S^{\mathbb{Z}^d}$ qui commutent avec les applications de décalage. Ce théorème, dont la démonstration n'est pas très difficile, a d'abord été énoncé dans le cas de la dimension 1 dans un article de G. A. Hedlund de 1969 [8], puis étendu dès 1972 par D. Richardson à la dimension plus grande [14]. Il contribue à expliquer pourquoi les automates cellulaires constituent une famille de systèmes dynamiques à temps discret particulièrement intéressants à étudier.

1.3 – Classification des automates cellulaires

Avec le formalisme que nous avons introduit, s'intéresser à l'évolution d'un automate cellulaire à partir d'une configuration initiale $x \in S^{\mathbb{Z}^d}$ revient à étudier le comportement de la suite $(F^n(x))_{n \geq 0}$ des itérés de la fonction F qui définit l'automate cellulaire.

Pour commencer, restreignons-nous au cas de la dimension $d = 1$, et d'un ensemble de symboles binaire $S = \{0, 1\}$. Supposons de plus que l'automate cellulaire est de rayon 1, c'est-à-dire que le voisinage est donné par l'ensemble $\mathcal{N} = \{-1, 0, 1\}$. La règle locale est alors une fonction $f : \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$, et il y a donc $2^8 = 256$ fonctions possibles, qui définissent 256 automates cellulaires différents.

En 1983, Wolfram a proposé une classification informelle des comportements de ces 256 automates cellulaires *élémentaires* [17]. La classe 1 est constituée des automates cellulaires qui évoluent presque toujours vers un état homogène où il ne reste qu'un seul symbole. Dans la classe 2, les diagrammes espace-temps font apparaître une structure périodique simple. La classe 3 contient les automates cellulaires « chaotiques », qui révèlent un comportement désordonné. Enfin, la classe 4 contient les automates cellulaires pour lesquels émergent des structures complexes qui interagissent entre elles.

La figure 3 montre des portions de *diagrammes espace-temps* d'automates cellulaires appartenant à chacune de ces classes. La configuration initiale est représentée sur la ligne du bas, la ligne juste au-dessus correspond à son image par l'automate cellulaire, et en lisant le diagramme de bas en haut, les lignes suivantes donnent les configurations obtenues sous l'action d'itérations successives. Les nombres indiqués au-dessus des diagrammes sont les numéros des automates cellulaires considérés dans la numérotation de Wolfram. Notons que la règle qui porte le numéro 184 n'est autre que l'auto-

mate cellulaire trafic, que nous avons déjà rencontré en figure 1.

La classification de Wolfram a été l'objet de nombreuses critiques, car personne n'a réussi à trouver de manière vraiment satisfaisante comment établir des frontières claires entre les classes. Son principal mérite a néanmoins été d'ouvrir la voie à de nouvelles directions de recherches, qui ont abouti à l'idée qu'il était difficile, voire impossible, de trouver un procédé à la fois rigoureux et réalisable en pratique, permettant de répartir les automates cellulaires en différentes classes selon leur comportement.

Pour comprendre cette difficulté, commençons par examiner la classe 1, a priori la plus simple. Elle est constituée des automates cellulaires qui effacent toute l'information initiale et où, au bout d'un certain temps, un seul symbole reste visible. Lorsque cette propriété est vérifiée pour toutes les configurations initiales, on dit que l'automate cellulaire est *nilpotent*. Formellement, cela signifie qu'il existe un symbole $s \in S$ tel que

$$\forall x \in S^{\mathbb{Z}^d}, \exists n \in \mathbb{N}, F^n(x) = s^{\mathbb{Z}^d}.$$

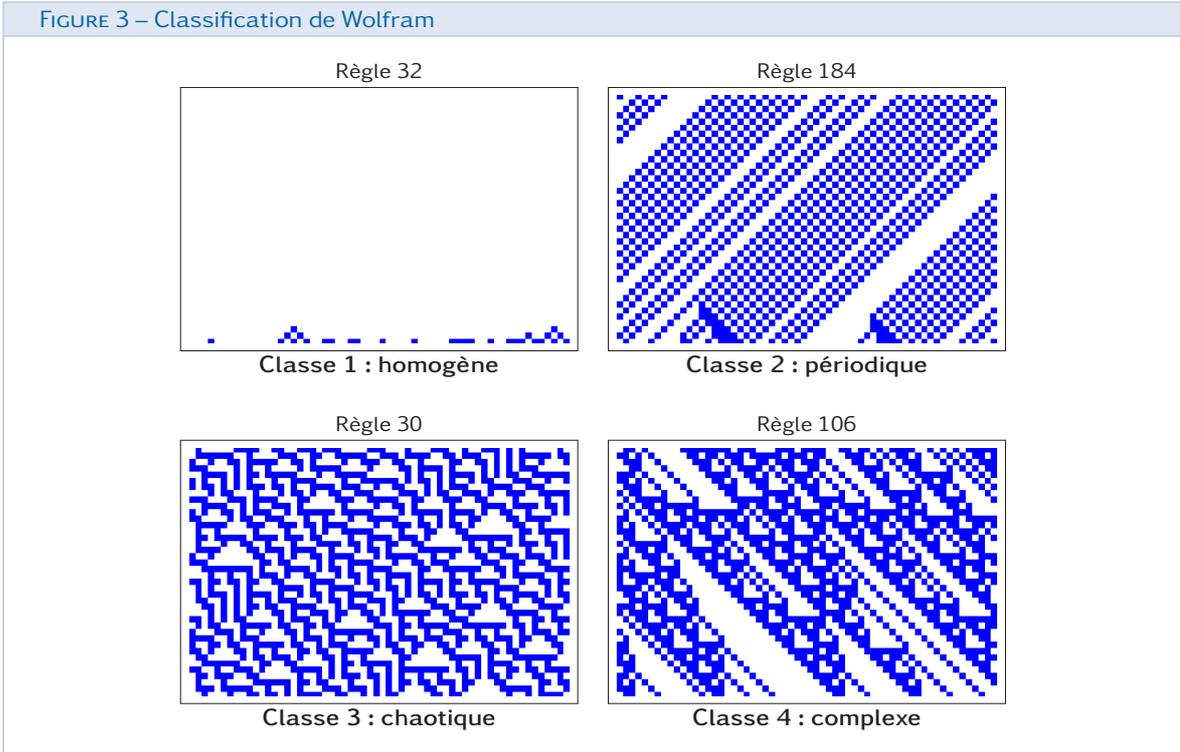
En utilisant un argument de compacité, on peut en fait intervertir les quantificateurs dans cette propriété : si elle est vérifiée, alors

$$\exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in S^{\mathbb{Z}^d}, F^n(x) = s^{\mathbb{Z}^d}.$$

Même si cette notion paraît simple, J. Kari a démontré en 1992 [10] que la nilpotence est une propriété indécidable : il n'existe pas d'algorithme qui, étant donné un automate cellulaire, dirait si celui-ci est nilpotent ou non.

Quant aux autres classes, en donner une définition pleinement satisfaisante est déjà un problème en soi et il existe de nombreuses propositions, chacune avec ses qualités et ses défauts. Dans un article de 1997, P. Kůrka a ainsi introduit trois classifications des automates cellulaires [11], reflétant différents points de vue qu'on peut adopter pour caractériser leur comportement (combinatoire des mots, sensibilité aux conditions initiales, propriétés des attracteurs du système dynamique). Bref, réussir à comprendre et à classer les comportements des automates cellulaires reste un défi, encore aujourd'hui.

2. Théorie des nombres



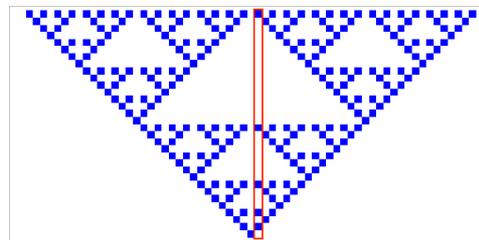
2.1 – Automates cellulaires linéaires

Considérons l'automate cellulaire de la somme, défini par

$$\forall x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}, \forall k \in \mathbb{Z}, F(x)_k = x_{k-1} + x_{k+1} \pmod{2}.$$

Si on trace le diagramme espace-temps de cet automate cellulaire à partir d'une configuration initiale comportant un unique 1, on observe un triangle de Sierpiński (ou de manière équivalente, le triangle de Pascal modulo 2), comme représenté en figure 4. L'apparition de cette structure auto-similaire est facile à expliquer : comme la règle d'actualisation de l'automate est locale, à chaque fois qu'on retrouve dans le diagramme espace-temps une cellule dans l'état 1 dont les voisins sont toutes dans l'état 0, un nouveau triangle identique à celui d'origine recommence à se former.

FIGURE 4 – Diagramme espace-temps de l'automate cellulaire de la somme



Plus généralement, si $S = \mathbb{F}_q$ (corps fini de caractéristique p), on peut s'intéresser aux automates cellulaires *linéaires* sur $\mathbb{F}_q^{\mathbb{Z}}$, c'est-à-dire à ceux qui définissent une application \mathbb{F}_q -linéaire du \mathbb{F}_q -espace vectoriel $\mathbb{F}_q^{\mathbb{Z}}$ dans lui-même. Leur règle locale est de la forme

$$f(b_1, \dots, b_m) = a_1 b_1 + \dots + a_m b_m,$$

pour des coefficients $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{F}_q$.

Nous allons voir que lorsqu'on représente les diagrammes espace-temps de ces automates cellulaires à partir de configurations initiales ne contenant qu'un nombre fini de valeurs non nulles (ou plus

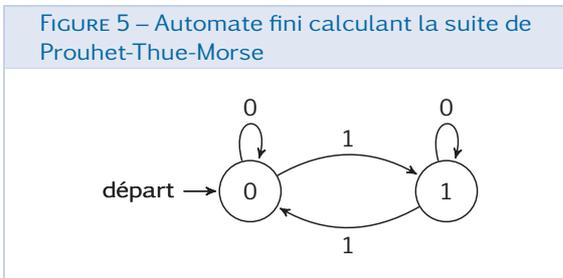
généralement, à partir de configurations ultimement périodiques dans les deux directions), les suites de nombres obtenues en colonne ont des propriétés remarquables. Sur la figure 4, si on numérote les lignes de bas en haut à partir de 0, la colonne encadrée en rouge correspond ainsi à la suite indicatrice des nombres de la forme $2^n - 1$, pour $n \geq 1$. Afin de présenter les propriétés partagées par toutes les suites apparaissant en colonne, commençons par introduire la notion de *suite automatique*.

2.2 – Suites automatiques

Pour un entier $k \geq 1$, on dit qu'une suite est k -automatique si ses termes peuvent être calculés par un automate fini de la manière suivante : le n -ième terme de la suite est uniquement fonction de l'état atteint par l'automate après lecture de la représentation de l'entier n en base k .

Un exemple simple de suite 2-automatique est la suite de Prouhet-Thue-Morse. Cette suite est définie par : $u_n = 0$ si l'écriture binaire de n comporte un nombre pair de 1, et $u_n = 1$ sinon. La figure 5 présente un automate fini permettant de calculer u_n en lisant successivement les chiffres de l'écriture binaire de n et en suivant les flèches données par l'automate. L'état sur lequel on aboutit après lecture de tous les chiffres est égal à u_n .

FIGURE 5 – Automate fini calculant la suite de Prouhet-Thue-Morse



Une définition équivalente consiste à dire qu'une suite est k -automatique si c'est le point fixe d'un morphisme k -uniforme, ou l'image par une projection lettre à lettre d'un tel point fixe. On peut ainsi vérifier que la suite de Prouhet-Thue-Morse est le point fixe commençant par 0 du morphisme : $\varphi : 0 \mapsto 01, 1 \mapsto 10$.

On peut également montrer qu'une suite u est k -automatique si et seulement si son k -noyau, défini par $N_k(u) = \{(u_{ki+n+j})_{n \geq 0} : i \geq 0, 0 \leq j < k^i\}$, est un ensemble fini.

Les équivalences ci-dessus sont démontrées dans le livre de J.-P. Allouche et J. Shallit [1], qui est

l'ouvrage de référence sur les suites automatiques. On y trouvera aussi une caractérisation algébrique des suites automatiques : dans le cas où l'entier k est un nombre premier p , le théorème de Christol affirme en effet qu'une suite u à valeurs dans \mathbb{F}_q est p -automatique si et seulement si la série formelle $u(X) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n$ est algébrique sur \mathbb{F}_q , c'est-à-dire s'il existe des polynômes $P_0(X), P_1(X), \dots, P_d(X)$ tels que $P_0(X) + P_1(X)u(X) + \dots + P_d(X)u(X)^d = 0$.

Dans un article de 1993, B. Litow et P. Dumas [12] ont montré que les automates cellulaires linéaires possèdent la propriété suivante : à partir d'une configuration initiale ne contenant qu'un nombre fini de valeurs non nulles, toutes les suites qu'on peut lire dans les colonnes du diagramme espace-temps de l'automate cellulaire sont p -automatiques. Ce résultat est lié au caractère auto-similaire des diagrammes espace-temps, qui permet de montrer l'algébricité des séries formelles. Plus récemment, E. Rowland et R. Yassawi [15] ont montré une réciproque à ce résultat : une suite à valeurs dans \mathbb{F}_q est p -automatique si et seulement si elle peut être obtenue en colonne du diagramme espace-temps d'un automate cellulaire (éventuellement à mémoire $m \geq 1$, c'est-à-dire que la ligne t du diagramme espace-temps est obtenue par un procédé local à partir des lignes $t-1, \dots, t-m$), avec une configuration initiale ultimement périodique dans les deux directions. Grâce aux automates cellulaires, on a donc une nouvelle caractérisation des suites p -automatiques !

3. Probabilités

3.1 – Comportement à partir de configurations aléatoires

L'évolution de certains automates cellulaires à partir de configurations aléatoires intéresse tout particulièrement les probabilistes. Voici deux exemples qui en témoignent.

Automate cellulaire bootstrap. Considérons l'automate cellulaire sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$ dont la règle locale est définie de la manière suivante : une cellule qui est à l'état 1 reste à l'état 1, et une cellule qui est à l'état 0 passe à l'état 1 si elle a au moins deux voisines dans l'état 1 parmi ses quatre voisines immédiates (Nord, Sud, Est, Ouest). Lorsqu'on itère cet automate cellulaire à partir d'une configuration où les cellules sont initialement occupées (état 1) avec probabilité p indépendamment les unes des autres, on parle de pro-

cessus de percolation *bootstrap*. Expérimentalement, on observe que l'état 1 envahit très rapidement la grille dès que p est suffisamment grand, tandis que pour de toutes petites valeurs de p , les simulations se stabilisent sur une configuration constituée d'une union disjointe de rectangles de cellules occupées.

Sur la grille infinie \mathbb{Z}^2 , l'étude mathématique de ce modèle révèle néanmoins que dès que p est strictement positif, chaque cellule de la grille finit par devenir occupée avec probabilité 1. A. van Enter a donné une preuve simple et élégante de ce résultat en 1987 [3]. L'idée consiste à montrer que même si p est tout petit, comme la grille est infinie, la configuration initiale contient forcément quelque part un très grand carré de cellules occupées, à partir duquel il va être « facile » d'envahir la grille, car il suffit d'un carré occupé sur le bord pour occuper toute une ligne de plus, etc. Ce n'est cependant que bien plus tard qu'on a pu comprendre plus finement pourquoi les simulations sur des fenêtres finies étaient si trompeuses. A. E. Holroyd a ainsi montré en 2003 [9] que sur une très grande grille $N \times N$,

- si $p > \frac{\pi^2}{18 \ln N}$, la grille a une probabilité proche de 1 de finir par être entièrement remplie de cellules dans l'état 1,
- si $p < \frac{\pi^2}{18 \ln N}$, cela arrive avec une probabilité proche de 0.

Mais ce seuil $\pi^2/18$ ne peut pas être confirmé expérimentalement car la convergence vers cette constante est tellement lente que pour avoir un espoir de s'en approcher, il faudrait effectuer des simulations sur une grille de taille environ 10^{20} , comme l'ont précisé J. Gravner et A. E. Holroyd en 2008 [6].

Automate cellulaire de la majorité de Toom. Les automates cellulaires de la majorité constituent une autre famille d'automates cellulaires particulièrement intéressants à étudier sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$. La règle locale est telle qu'une cellule passe à l'état 0 (resp. 1) si elle a une majorité de voisines à l'état 0 (resp. 1). Intéressons-nous plus précisément à l'automate de la majorité de Toom, pour lequel le voisinage d'une cellule est constitué d'elle-même, et de ses deux voisines au Nord et à l'Est. On a ainsi $\mathcal{N} = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$, et la règle locale est définie par :

$$f(a, b, c) = \begin{cases} 1 & \text{si } a + b + c \geq 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fois-ci, en exploitant des propriétés de percolation, on peut démontrer [2] qu'à partir d'une configuration initiale où chaque cellule est indépendam-

ment dans l'état 1 avec probabilité p (et dans l'état 0 sinon), on a le comportement suivant :

- si $p < 1/2$, l'état 0 envahit toute la grille,
- si $p > 1/2$, l'état 1 envahit toute la grille.

Ainsi, en itérant cet automate cellulaire, on peut savoir si la grille contenait initialement une majorité de 0 ou de 1 (pour $p = 1/2$, on observe des plages de plus en plus grandes de cellules dans l'état 0 ou 1, mais sans qu'il y ait disparition de l'un des états). Nous allons voir dans le paragraphe suivant un autre intérêt de cet automate cellulaire.

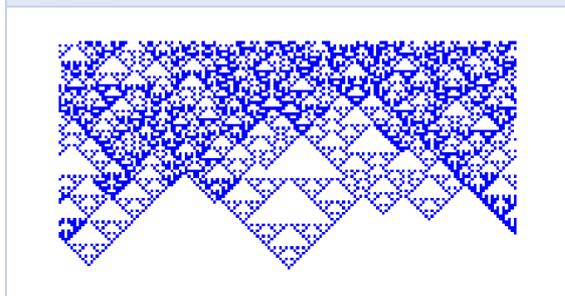
3.2 – Automates cellulaires probabilistes

Les automates cellulaires probabilistes sont une extension des automates cellulaires, pour laquelle la fonction locale f n'est plus à valeurs dans S mais dans l'ensemble $\mathcal{M}(S)$ des distributions de probabilités sur l'ensemble S . Pour $(a_1, \dots, a_m) \in S^m$, et $s \in S$, la valeur de $f(a_1, \dots, a_m)(s)$ donne alors la probabilité de mettre à jour une cellule par la valeur s si son voisinage est dans l'état (a_1, \dots, a_m) . Comme précédemment, toutes les cellules sont mises à jour de manière simultanée, et conditionnellement à la donnée de la configuration, les tirages sont effectués de manière indépendante pour différentes cellules. Les automates cellulaires probabilistes peuvent ainsi être vus comme des chaînes de Markov sur $S^{\mathbb{Z}^d}$. D'un point de vue informatique, ils constituent un modèle de calcul bruité.

Considérons un automate cellulaire déterministe F et supposons qu'en chaque cellule, une erreur se produit avec probabilité ε (de manière indépendante pour différentes cellules), auquel cas au lieu d'appliquer la règle locale de F , la cellule est mise à jour par un état de S choisi uniformément au hasard. Notons F_ε l'automate cellulaire probabiliste ainsi défini. On dira que F_ε est la version bruitée de F , avec un bruit ε . Lorsqu'on itère F_ε , on s'attend généralement à ce que le système oublie progressivement toute information sur la configuration initiale au cours de son évolution, et converge vers un état d'équilibre qui ne dépend plus du tout de la configuration initiale. En termes mathématiques, on parle d'*ergodicité*, ce qui correspond au fait que F_ε a une unique distribution invariante, vers laquelle on converge à partir de n'importe quelle distribution initiale. Une illustration en est donnée en figure 6 : celle-ci représente à nouveau un diagramme espace-temps de l'automate cellulaire de la somme à partir d'une configuration initiale comportant un unique 1, mais cette fois-ci avec un bruit $\varepsilon = 0.005$. Contrairement au cas déter-

ministe montré en figure 4, si on efface les premières lignes du diagramme espace-temps, il est bien difficile de retrouver une quelconque information sur la configuration initiale dont on était parti.

FIGURE 6 – Diagramme espace-temps de la version bruitée de l'automate cellulaire de la somme



En dimension 2, on sait qu'il existe des exceptions à ce phénomène d'ergodicité. En particulier, on peut démontrer que si ε est suffisamment petit, alors la version bruitée de l'automate cellulaire de la majorité de Toom n'est pas ergodique [16]. Plus précisément, à partir d'une configuration initiale ne contenant que des 0, les configurations conservent

une très large majorité de 0 tout au long de l'évolution, tandis qu'à partir d'une configuration initiale ne contenant que des 1, elles conservent une très large majorité de 1. Cependant, en dimension 1, la célèbre conjecture des taux positifs affirmait que tout automate cellulaire soumis à des erreurs aléatoires est ergodique. P. Gács a réfuté cette conjecture en 2001, en proposant un contre-exemple extrêmement sophistiqué (nombre d'états de l'ordre de $R_0^{4/3}$ et taux d'erreur $\varepsilon \leq R_0^{-40}$, où R_0 est une constante qui dépasse 2^{18}), dans un article de plus de 200 pages [4, 7]. Si on se limite aux automates cellulaires les plus simples (nilpotents, etc.), l'ergodicité est cependant la norme [13], et trouver un contre-exemple plus simple à la conjecture des taux positifs reste une question d'actualité. Cette question est d'ordre théorique, mais elle pourrait également apporter un nouvel éclairage sur les possibilités de mener à bien un calcul distribué en présence d'erreurs aléatoires.

Au-delà de leur aspect ludique et de leur capacité à modéliser de nombreux phénomènes complexes régis par des interactions locales (tissus cellulaires, feux de forêts, formation d'essaims d'oiseaux ou de bancs de poisson...), l'étude des automates cellulaires continue donc à présenter un réel intérêt mathématique.

Références

- [1] J.-P. ALLOUCHE et J. SHALLIT. *Automatic sequences. Theory, applications, generalizations*. Cambridge : Cambridge University Press, 2003.
- [2] A. BUŠIĆ et al. « Density classification on infinite lattices and trees ». *Electron. J. Probab.* **18** (2013). Id/No 51, p. 22.
- [3] A. C. D. van ENTER. « Proof of Straley's argument for bootstrap percolation. » *J. Stat. Phys.* **48**, n° 3-4 (1987), p. 943-945.
- [4] P. GÁCS. « Reliable cellular automata with self-organization ». *J. Stat. Phys.* **103**, n° 1-2 (2001), p. 45-267.
- [5] M. GARDNER. « MATHEMATICAL GAMES ». *Scientific American* **223**, n° 4 (1970), p. 120-123.
- [6] J. GRAVNER et A. E. HOLROYD. « Slow convergence in bootstrap percolation ». *Ann. Appl. Probab.* **18**, n° 3 (2008), p. 909-928.
- [7] L. F. GRAY. « A reader's guide to P. Gacs's "positive rates" paper : "Reliable cellular automata with self-organization". » *J. Stat. Phys.* **103**, n° 1-2 (2001), p. 1-44.
- [8] G. A. HEDLUND. « Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system ». *Math. Syst. Theory* **3** (1969), p. 320-375.
- [9] A. E. HOLROYD. « Sharp metastability threshold for two-dimensional bootstrap percolation ». *Probab. Theory Relat. Fields* **125**, n° 2 (2003), p. 195-224.
- [10] J. KARI. « The nilpotency problem of one-dimensional cellular automata ». *SIAM J. Comput.* **21**, n° 3 (1992), p. 571-586.
- [11] P. KŮRKA. « Languages, equicontinuity and attractors in cellular automata ». *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **17**, n° 2 (1997), p. 417-433.
- [12] B. LITOW et P. DUMAS. « Additive cellular automata and algebraic series ». *Theor. Comput. Sci.* **119**, n° 2 (1993), p. 345-354.
- [13] I. MARCOVICI, M. SABLİK et S. TAATI. « Ergodicity of some classes of cellular automata subject to noise ». *Electron. J. Probab.* **24** (2019). Id/No 41, p. 44.
- [14] D. RICHARDSON. « Tessellations with local transformations ». *J. Comput. Syst. Sci.* **6** (1972), p. 373-388.
- [15] E. ROWLAND et R. YASSAWI. « A characterization of p -automatic sequences as columns of linear cellular automata ». *Adv. Appl. Math.* **63** (2015), p. 68-89.

- [16] A. L. TOOM. *Stable and attractive trajectories in multicomponent systems*. Multicomponent random systems, Adv. Probab. relat. Top., Vol. 6, 549-575. 1980.
- [17] S. WOLFRAM. *Universality and complexity in cellular automata*. Cellular automata, Proc. Interdisc. Workshop, Los Alamos/N.M. 1983, Physica D 10, n° 1-2, 1-35. 1984.



Irène MARCOVICI

Institut Élie Cartan de Lorraine, Université de Lorraine
 irene.marcovici@univ-lorraine.fr
<https://marcovici.perso.math.cnrs.fr/>

Irène Marcovici est maîtresse de conférences (HDR) dans l'équipe de probabilités et statistique de l'Institut Élie Cartan de Lorraine, à Nancy. Ses recherches se situent à l'interface entre probabilités, combinatoire, systèmes dynamiques discrets, et informatique mathématique.

Je remercie chaleureusement Yohann Genzmer pour sa lecture attentive et ses nombreuses suggestions. Je remercie également Charlotte Hardouin de m'avoir invitée à écrire cet article.

Panoramas et Synthèses - nouveauté



Vol. 57
Topics in statistical learning theory
 P. L. BARTLETT, S. DASGUPTA

ISBN 978-2-85629-964-7
 2022 - 89 pages - Softcover. 17 x 24
 Public: 38 € - Members: 27 €

This volume is the outcome of a series of three lectures on statistical learning theory given at Institut Henri Poincaré in 2011 under the auspices of the Société Mathématique de France. The introductory chapter provides an overview of the history of Statistical Learning Theory, its roots, its mathematical tools and the questions that make it. The chapter "Algorithms for minimally supervised learning" by Sanjoy Dasgupta describes

the progress of theoretical computer science on the issues of unsupervised learning (clustering) and active learning. Surprisingly, much of this progress is due to the confrontation of measurement concentration theory, complexity theory and established practices in numerical statistics.

The chapter "Online prediction" by Peter Bartlett focuses on online learning. It is a confrontation between statistics, game theory and optimization.

Disponible sur le site de la SMF (boutique en ligne) : <https://smf.emath.fr>

*frais de port non compris

