Processus de branchement multitypes conditionnés

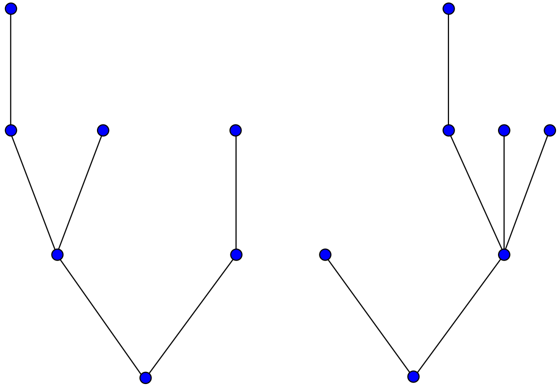
Sophie Pénisson
(*Université Paris-Est Créteil*)

Journée Nancéienne de Probabilités Discrètes

18 Juin 2015

UPEC Connaissance - Action
UNIVERSITÉ PARIS-EST CRÉTEIL VAL DE MARNE

Introduction : processus de branchement monotype



- chaque individu produit indépendemment des autres un nombre aléatoire de descendants, selon une loi de reproduction commune,
- X_k = taille de la population au temps k.

$$X_0 = 2; \quad X_1 = 4; \quad X_2 = 6; \quad X_3 = 2; \quad X_4 = 0.$$

$m =$ nombre moyen de descendants par individu

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to+\infty} X_n = 0\right) = 1 \iff m \leqslant 1.$$

Théorèmes limites conditionnels (Yaglom '47, Lamperti & Ney '68, ...)
Pour tous $x_0, z \in \mathbb{N}^*$,

Loi quasi-stationnaire $(m < 1)$

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}_{x_0}(X_k = z \mid X_k \neq 0) = \nu(z),$$

Q-processus $(m \leqslant 1)$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_{x_0}(X_k = z \mid X_{k+n} \neq 0) = \frac{1}{m^k}\frac{z}{x_0}P_k(x_0, z),$$

Loi stationnaire du Q-processus $(m < 1,\ \mathbb{E}(X_1 \ln X_1) < \infty)$

$$\lim_{k\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_{x_0}(X_k = z \mid X_{k+n} \neq 0) = \frac{z\nu(z)}{\sum_{x\in\mathbb{N}^*} x\nu(x)}.$$

Questions

dans le cadre multitype

- La loi stationnaire du Q-processus (obtenue comme deux limites successives) peut-elle être vue comme une **double limite** ?

$$\lim_{k\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}_{\mathbf{x}_0}\Big(\mathbf{X}_k=\mathbf{z}\mid\mathbf{X}_{k+n}\neq\mathbf{0}\Big)\stackrel{?}{=}\lim_{(k,n)\to+\infty}\dots$$

- Le Q-processus (obtenu par conditionnement à la non-extinction)

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}_{\mathbf{x}_0}\Big(\mathbf{X}_k=\mathbf{z}\mid\mathbf{X}_{k+n}\neq\mathbf{0}\Big)$$

peut-il être obtenu via d'autres conditionnements ?

  - atteinte d'un certain état ou seuil non nul :

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}_{\mathbf{x}_0}\Big(\mathbf{X}_k=\mathbf{z}\mid\mathbf{X}_{k+n}\in S\Big)$$

  - effectif total infini :

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}_{\mathbf{x}_0}\Big(\mathbf{X}_k=\mathbf{z}\mid\sum_{i=0}^{+\infty}|\mathbf{X}_i|=n\Big)$$

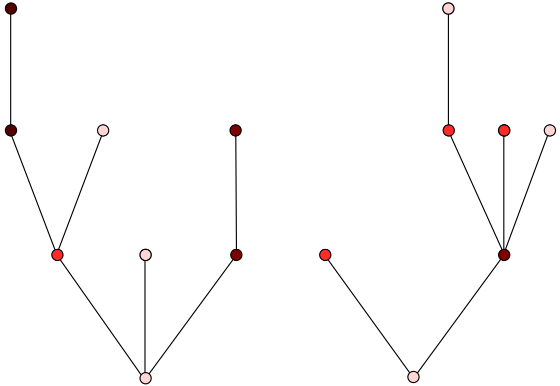
1. Processus de branchement multitypes

2. Loi stationnaire du Q-processus : une double-limite ?

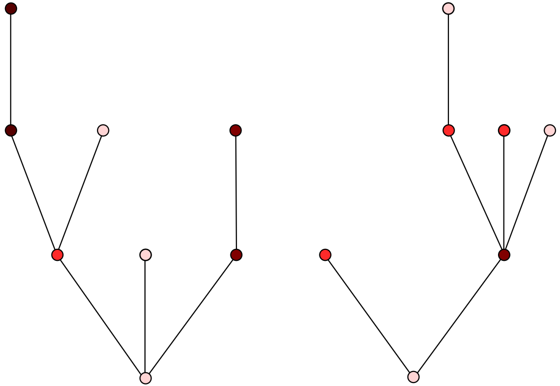
3. Comparaison avec d'autres conditionnements
    - Conditionnement par l'atteinte d'un seuil ou état non nul
    - Conditionnement par l'effectif total

Processus de branchement multitypes

Définition et premières propriétés



- d type d'individus,
- chaque individu produit indépendemment des autres un nombre aléatoire de descendants (de tous types), selon une loi de reproduction propre à son type,
- $\mathbf{X}_k = (X_{k,1}, \ldots, X_{k,d}) \in \mathbb{N}^d$ composition de la population au temps k.



$d = 3$:

$$\mathbf{X}_0 = (2,0,0)\,; \quad \mathbf{X}_1 = (1,2,2)\,;$$
$$\mathbf{X}_2 = (2,2,2)\,; \quad \mathbf{X}_3 = (1,0,1)\,;$$
$$\mathbf{X}_4 = (0,0,0)\,.$$

- $m_{ij} =$ nb moyen de descendants de type j pour un individu de type i,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots \\ m_{21} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & m_{dd} \end{pmatrix}.$$

- On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbf{M}^n > \mathbf{0}$. Soit $\rho > 0$ sa valeur propre maximale, et $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ les vecteurs propres associés.

$$\mathbf{M}\mathbf{u}^T = \rho\mathbf{u}^T, \ \mathbf{v}\mathbf{M} = \rho\mathbf{v}, \ \mathbf{u} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1.$$

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \to +\infty} \mathbf{X}_n = \mathbf{0}\right) = 1 \iff \rho \leqslant 1.$$

Théorèmes limites conditionnels

Loi quasi-stationnaire ($\rho < 1$)

[Joffe & Spitzer, '67]

Pour tous $\mathbf{x}_0, \mathbf{z} \in \mathbb{N}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$,

$$\lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}_{\mathbf{x}_0}\left(\mathbf{X}_k = \mathbf{z} \mid \mathbf{X}_k \neq \mathbf{0}\right) = \nu(\mathbf{z}),$$

où ν est une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ indépendante de l'état initial $\mathbf{x}_0$.

Sous l'hypothèse

$$(X \ln X) \qquad \forall i, j = 1 \ldots d,\ \mathbb{E}_{\mathbf{e}_i}(X_{1,j} \ln X_{1,j}) < +\infty,$$

ν admet des moments d'ordre 1 finis et strictement positifs.

Théorèmes limites conditionnels

Q-processus ($\rho \leqslant 1$)

[Nakagawa, '78]

Pour tous $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{N}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$, $k_1 \leqslant \ldots \leqslant k_j \in \mathbb{N}$, et $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_j \in \mathbb{N}^d$,

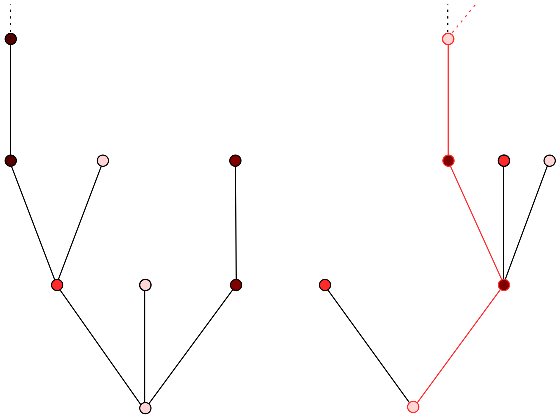
$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}_{\mathbf{x}_0}\left(\mathbf{X}_{k_1} = \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{X}_{k_j} = \mathbf{x}_j \mid \mathbf{X}_{k_j+n} \neq \mathbf{0}\right) = \frac{1}{\rho^{k_j}} \frac{\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{u}} \mathbb{P}_{\mathbf{x}_0}\left(\mathbf{X}_{k_1} = \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{X}_{k_j} = \mathbf{x}_j\right).$$

Le Q-processus ainsi défini est markovien de probabilités de transition

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\rho} \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}} P(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{N}^d \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Théorèmes limites conditionnels

Interprétation trajectorielle du Q-processus



- individu “immortel” de type i produit $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^d$ descendants selon la loi de reproduction biaisée

$$\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}}{\rho u_i} p_i(\mathbf{k})$$

- son descendant "immortel" sera de type j avec probabilité $\frac{k_j u_j}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}}$

Théorèmes limites conditionnels

Loi stationnaire du Q-processus ($\rho < 1$)

[Nakagawa, '78]

Sous l'hypothèse ($X \ln X$), le Q-processus est positif récurrent. Sa loi stationnaire est la loi quasi-stationnaire ν biaisée en taille

$$\mu(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{z} \cdot \mathbf{u}\,\nu(\mathbf{z})}{\sum_{\mathbf{y} \in \mathbb{N}^d \setminus \{\mathbf{0}\}} \mathbf{y} \cdot \mathbf{u}\,\nu(\mathbf{y})}, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{N}^d \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Loi stationnaire du Q-processus obtenue comme une double limite

$(\rho < 1)$

Proposition

On suppose les moments d'ordre 2 finis. Alors pour tous $\mathbf{x}_0, \mathbf{z} \in \mathbb{N}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$,

$$\lim_{\substack{n \to +\infty \\ k \to +\infty}} \mathbb{P}_{\mathbf{x}_0}\left(\mathbf{X}_k = \mathbf{z} \mid \mathbf{X}_{k+n} \neq \mathbf{0}\right) = \mu\left(\mathbf{z}\right),$$

où μ est la loi quasi-stationnaire ν biaisée en taille.

Cela implique en particulier que pour tout $0 < t < 1$,

$$\lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}_{\mathbf{x}_0}\left(\mathbf{X}_{\lfloor kt \rfloor} = \mathbf{z} \mid \mathbf{X}_k \neq \mathbf{0}\right) = \mu\left(\mathbf{z}\right).$$

Le cas critique

$(\rho = 1)$

Dans ce cas le Q-processus est transient. Une normalisation adaptée pour obtenir une loi limite non dégénérée est de la forme $\mathbf{X}_k/k$. En revanche, même avec cette normalisation, le résultat précédent n'est pas valable.

$$\lim_{k\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}_1\left(\frac{X_k}{k}\leqslant z \mid X_{k+n}\neq 0\right) = 1 - e^{-\frac{2z}{\sigma^2}},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{k\to+\infty}\mathbb{P}_1\left(\frac{X_k}{k}\leqslant z \mid X_{k+n}\neq 0\right) = 1 - e^{-\frac{2z}{\sigma^2}} - \frac{2z}{\sigma^2}e^{-\frac{2z}{\sigma^2}}.$$

Pour tout $0 < t < 1$,

$$\lim_{k\to+\infty}\mathbb{P}_1\left(\frac{X_{\lfloor kt\rfloor}}{k} = . \mid X_k \neq 0\right) = \mathcal{E}\left(\frac{2}{t\sigma^2}\right) * \mathcal{E}\left(\frac{2}{t(1-t)\sigma^2}\right).$$

Conditionnement par l'atteinte d'un seuil ou état non nul ($\rho \leqslant 1$)

Proposition

Soit $S \subset \mathbb{N}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ tel que $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{N}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathbb{P}_{\mathbf{x}}\left(\mathbf{X}_n \in S\right) > 0.$$

Si $\rho < 1$ (resp. $\rho = 1$), on suppose $X \ln X$ (resp. mom. d'ordre 2 et S fini). Alors pour tous $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{N}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$, $k_1 \leqslant \ldots \leqslant k_j \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_j \in \mathbb{N}^d$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_{\mathbf{x}_0}\left(\mathbf{X}_{k_1} = \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{X}_{k_j} = \mathbf{x}_j \mid \mathbf{X}_{k_j+n} \in S\right) = \frac{1}{\rho^{k_j}} \frac{\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{u}} \mathbb{P}_{\mathbf{x}_0}\left(\mathbf{X}_{k_1} = \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{X}_{k_j} = \mathbf{x}_j\right).$$

Cas particuliers ($\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, $M > 0$) :

$$S = \{\mathbf{y}\},$$
$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d,\ |\mathbf{x}| = M\},$$
$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d,\ |\mathbf{x}| \geqslant M\} \quad (\rho < 1).$$

Conditionnement par l'effectif total

Soit $\mathbf{N} = (N_1, \ldots, N_d)$, où N_i est l'effectif total d'individus de type i :

$$N_i = \sum_{k=0}^{+\infty} X_{k,i}.$$

Question

Comportement de $(\mathbf{X}_k)_{k \geqslant 0}$ conditionnellement à $\{\mathbf{N} = \mathbf{n}\}$, lorsque $\mathbf{n}$ tend vers l'infini (sens à préciser).

- Résolu dans le cadre monotype [Kennedy '75],
- Conditionnements pouvant sembler "équivalents" :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{X_n \neq 0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{N \geqslant n\},$$

pourtant le processus limite obtenu n'est pas toujours le Q-processus.

Conditionnement par l'effectif total

Soit $\mathbf{N} = (N_1, \ldots, N_d)$, où N_i est l'effectif total d'individus de type i :

$$N_i = \sum_{k=0}^{+\infty} X_{k,i}.$$

Question

Comportement de $(\mathbf{X}_k)_{k\geqslant 0}$ conditionnellement à $\{\mathbf{N} = \mathbf{n}\}$, lorsque $\mathbf{n}$ tend vers l'infini (sens à préciser).

Démarche

- Loi de l'effectif total.
- Ramener le problème au cas critique
  - via un processus critique "associé".
- Résoudre le cas critique
  - comportement asymptotique de la loi de l'effectif total le long d'un vecteur de proportion "typique" (le vecteur propre à gauche $\mathbf{v}$).

Conditionnement par l'effectif total

Processus associé

Fonction génératrice de la loi de descendance : $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_d)$, où

$$f_i(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^d} p_i(\mathbf{k}) \, \mathbf{r}^{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{r} \in [0,1]^d.$$

Processus associé

Pour tout vecteur $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ tel que $\mathbf{f}(\mathbf{a}) < +\infty$, on note $(\overline{\mathbf{X}}_k)_{k \geqslant 0}$ le processus de branchement définit par

$$\overline{f}_i(\mathbf{r}) = \frac{f_i(\mathbf{a}\mathbf{r})}{f_i(\mathbf{a})}.$$

La loi de la descendance est alors donnée par

$$\overline{p}_i(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{a}^{\mathbf{k}}}{f_i(\mathbf{a})} p_i(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d.$$

Conditionnement par l'effectif total

Théorème

On suppose

- $\exists\ \mathbf{a} > \mathbf{0}$ tel que $(\overline{\mathbf{X}}_k)_{k\geqslant 0}$ soit critique,
- $(\overline{\mathbf{X}}_k)_{k\geqslant 0}$ admet des moments d'ordre $d+1$, et ses matrices de covariance sont définies-positives.

Alors pour tous $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{N}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$, $k_1 \leqslant \ldots \leqslant k_j \in \mathbb{N}$, et $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_j \in \mathbb{N}^d$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_{\mathbf{x}_0}\left(\mathbf{X}_{k_1} = \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{X}_{k_j} = \mathbf{x}_j \mid \mathbf{N} = \lfloor n\bar{\mathbf{v}} \rfloor\right) = \frac{\mathbf{x}_j \cdot \bar{\mathbf{u}}}{\mathbf{x}_0 \cdot \bar{\mathbf{u}}} \mathbb{P}_{\mathbf{x}_0}\left(\overline{\mathbf{X}}_{k_1} = \mathbf{x}_1, \ldots, \overline{\mathbf{X}}_{k_j} = \mathbf{x}_j\right).$$

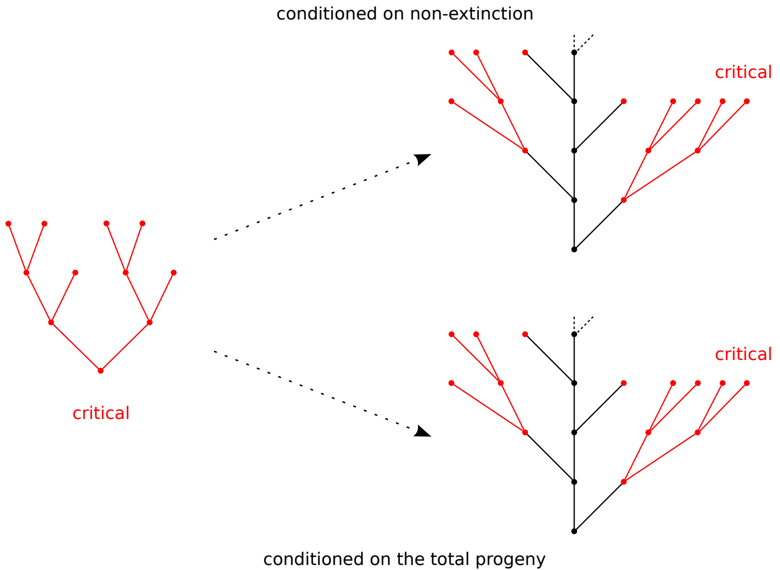
Le processus obtenu est markovien de probabilités de transition

$$\overline{Q}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y}\cdot\bar{\mathbf{u}}}{\mathbf{x}\cdot\bar{\mathbf{u}}}\overline{P}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{a}^{\mathbf{y}}}{\mathbf{f}(\mathbf{a})^{\mathbf{x}}}\frac{\mathbf{y}\cdot\bar{\mathbf{u}}}{\mathbf{x}\cdot\bar{\mathbf{u}}}P(\mathbf{x},\mathbf{y}), \qquad \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{N}^d \setminus \{\mathbf{0}\},$$

et correspond au Q-processus associé à $(\overline{\mathbf{X}}_k)_{k\geqslant 0}$.

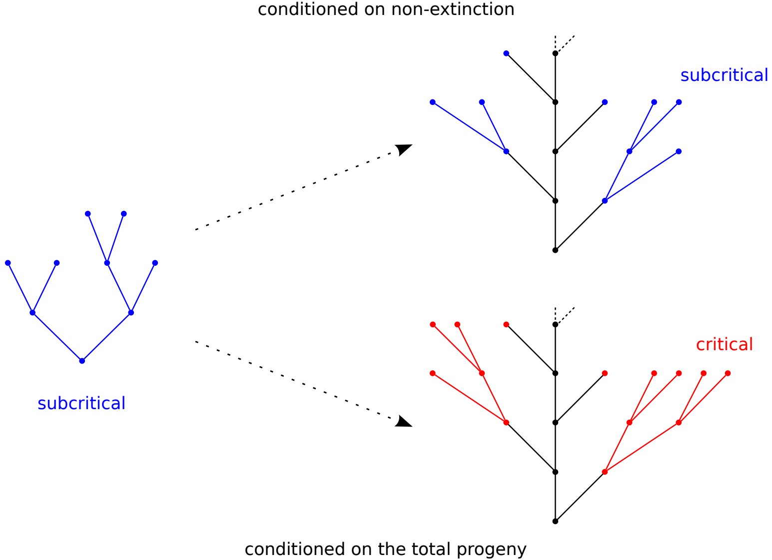
Illustration

Arbre monotype binaire critique



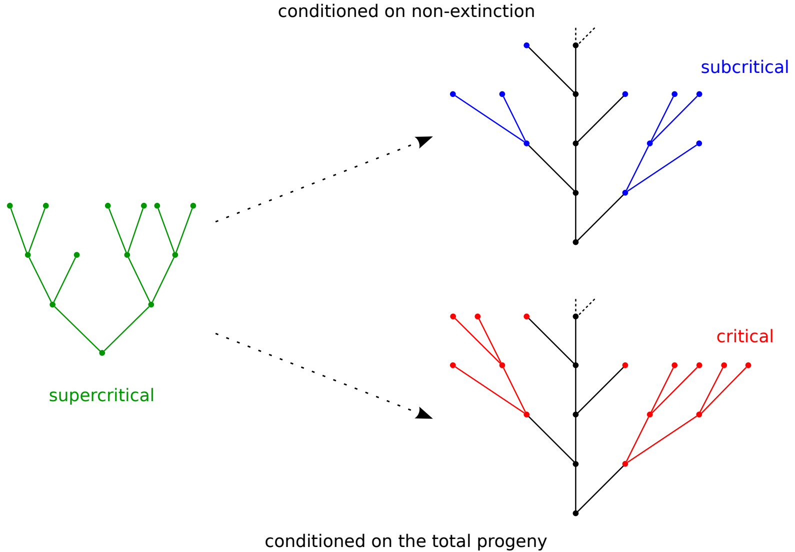
Illustration

Arbre monotype binaire sous-critique



Illustration

Arbre monotype binaire sur-critique



Conditionnement par l'effectif total

Idée de la preuve

Loi de l'effectif total

Pour tout $\mathbf{x}_0, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ avec $\mathbf{n} > \mathbf{0}$, $\mathbf{n} \geqslant \mathbf{x}_0$,

$$\mathbb{P}_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{N} = \mathbf{n}) = \frac{1}{n_1 \dots n_d} \sum_{\substack{\mathbf{k}^1, \dots, \mathbf{k}^d \in \mathbb{N}^d \\ \mathbf{k}^1 + \dots + \mathbf{k}^d = \mathbf{n} - \mathbf{x}_0}} \det \begin{pmatrix} n_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{k}^1 \\ \cdots \\ n_d \mathbf{e}_d - \mathbf{k}^d \end{pmatrix} \prod_{i=1}^{n} p_i^{*n_i}\left(\mathbf{k}^i\right).$$

- Se déduit de [Good, '75] ou [Chaumont & Liu, '14].
- Si $d = 1$,

$$\mathbb{P}_{x_0}(N = n) = \frac{x_0}{n} p^{*n}(n - x_0).$$

Cf théorème du ballottage de Bertrand :

$$\mathbb{P}(T_{x_0} = n) = \frac{x_0}{n} \mathbb{P}(S_n = -x_0).$$

Conditionnement par l'effectif total

Idée de la preuve

Loi de l'effectif total

Pour tout $\mathbf{x}_0, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ avec $\mathbf{n} > \mathbf{0}$, $\mathbf{n} \geqslant \mathbf{x}_0$,

$$\mathbb{P}_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{N} = \mathbf{n}) = \frac{1}{n_1 \ldots n_d} \sum_{\substack{\mathbf{k}^1, \ldots, \mathbf{k}^d \in \mathbb{N}^d \\ \mathbf{k}^1 + \ldots + \mathbf{k}^d = \mathbf{n} - \mathbf{x}_0}} \det \begin{pmatrix} n_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{k}^1 \\ \cdots \\ n_d \mathbf{e}_d - \mathbf{k}^d \end{pmatrix} \prod_{i=1}^{n} p_i^{*n_i}\left(\mathbf{k}^i\right).$$

(Non-)influence de la loi de reproduction sur la loi conditionnée

Pour tout $\mathbf{a} > \mathbf{0}$, le processus associé $(\overline{\mathbf{X}}_k)_{k \geqslant 0}$ satisfait pour tout $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{N}^d$, $k_1 \leqslant \ldots \leqslant k_j \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_j \in \mathbb{N}^d$ et $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mathbf{x}_0}&\left(\mathbf{X}_{k_1} = \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{X}_{k_j} = \mathbf{x}_j \mid \mathbf{N} = \mathbf{n}\right) \\ &= \mathbb{P}_{\mathbf{x}_0}\left(\overline{\mathbf{X}}_{k_1} = \mathbf{x}_1, \ldots, \overline{\mathbf{X}}_{k_j} = \mathbf{x}_j \mid \overline{\mathbf{N}} = \mathbf{n}\right).\end{aligned}$$

Conditionnement par l'effectif total

Idée de la preuve

Comportement asymptotique de la loi de l'effectif total pour $\rho = 1$

On suppose que le processus admet des moments d'ordre $d+1$, et que ses matrices de covariance sont définies-positives. Alors il existe $C > 0$ tel que pour tout $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{N}^d$,

$$\lim_{n \to +\infty} n^{\frac{d}{2}+1} \mathbb{P}_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{N} = \lfloor n\mathbf{v} \rfloor) = C\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{u}.$$

- $\mathbf{X}_k/k$ conditionnellement à $\{\mathbf{X}_k \neq \mathbf{0}\}$ converge vers une loi limite supportée par le rayon $\{\lambda\mathbf{v} : \lambda \geqslant 0\} \subset \mathbb{R}^d$, où $\mathbf{v}$ est le vecteur propre à gauche de $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{v} = \text{"proportion limite typique de la population"}$$

Conditionnement par l'effectif total

Idée de la preuve

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{d}{2}+1}\mathbb{P}_{\mathbf{x}_0}\left(\mathbf{N}=\lfloor n\mathbf{v}\rfloor\right) = C\mathbf{x}_0\cdot\mathbf{u}.$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{\mathbf{x}_0}\left(\mathbf{N}=\lfloor n\mathbf{v}\rfloor\right)\\
&= \frac{1}{\prod_{i=1}^{d}\lfloor nv_i\rfloor}\sum_{\substack{\mathbf{k}^1,\dots,\mathbf{k}^d\in\mathbb{N}^d\\ \mathbf{k}^1+\dots+\mathbf{k}^d=\lfloor n\mathbf{v}\rfloor-\mathbf{x}_0}} \det\begin{pmatrix}\lfloor nv_1\rfloor\,\mathbf{e}_1-\mathbf{k}^1\\ \cdots\\ \lfloor nv_d\rfloor\,\mathbf{e}_d-\mathbf{k}^d\end{pmatrix}\prod_{i=1}^{n} p_i^{*\lfloor nv_i\rfloor}\left(\mathbf{k}^i\right)\\
&\approx \frac{1}{\lfloor nv_d\rfloor}\det\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1-\mathbf{m}_1\\ \cdots\\ \mathbf{x}_0\end{pmatrix}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{d}\mathbf{S}^i_{\lfloor nv_i\rfloor}=\lfloor n\mathbf{v}\rfloor-\mathbf{x}_0\right),
\end{aligned}$$

- Théorème limite local et $\mathbf{v}=\mathbf{vM}$:
$$\lim_n n^{\frac{d}{2}}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{d}\mathbf{S}^i_{\lfloor nv_i\rfloor}=\lfloor n\mathbf{v}\rfloor-\mathbf{x}_0\right)=c,$$
- Soit $\mathbf{D}$ tel que $\det(\mathbf{I}-\mathbf{M})=(\mathbf{e}_d-\mathbf{m}^d)\cdot\mathbf{D}$.
Alors $\mathbf{D}$ vecteur propre à droite de $\mathbf{M}$, d'où $\mathbf{D}=C\mathbf{u}$.

Conditionnement par l'effectif total

Théorème

On suppose

- $\exists\ \mathbf{a} > \mathbf{0}$ tel que $(\overline{\mathbf{X}}_k)_{k \geqslant 0}$ soit critique,
- $(\overline{\mathbf{X}}_k)_{k \geqslant 0}$ admet des moments d'ordre $d+1$, et ses matrices de covariance sont définies-positives.

Alors pour tous $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{N}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$, $k_1 \leqslant \ldots \leqslant k_j \in \mathbb{N}$, et $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_j \in \mathbb{N}^d$,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}_{\mathbf{x}_0}\left(\mathbf{X}_{k_1} = \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{X}_{k_j} = \mathbf{x}_j \mid \mathbf{N} = \lfloor n\overline{\mathbf{v}} \rfloor\right) = \frac{\mathbf{x}_j \cdot \overline{\mathbf{u}}}{\mathbf{x}_0 \cdot \overline{\mathbf{u}}} \mathbb{P}_{\mathbf{x}_0}\left(\overline{\mathbf{X}}_{k_1} = \mathbf{x}_1, \ldots, \overline{\mathbf{X}}_{k_j} = \mathbf{x}_j\right).$$

Merci pour votre attention.