

Sous-linéarité du nombre de branches infinies dans des arbres aléatoires géométriques

David Coupier

Université Lille 1

Laboratoire Paul Painlevé

- 1 Deux modèles d'arbres aléatoires géométriques ($d = 2$)
- 2 Que dire de leurs branches infinies ?
- 3 Quelques mots sur la preuve

- 1 Deux modèles d'arbres aléatoires géométriques ($d = 2$)
- 2 Que dire de leurs branches infinies ?
- 3 Quelques mots sur la preuve

Le Radial Poisson Tree \mathcal{T}_ρ

\mathcal{N} est un Processus Ponctuel de Poisson (PPP) dans \mathbb{R}^2 homogène d'intensité 1.

$\rho > 0$ est un paramètre.

Supposons que $\mathcal{N} \cap B(O, \rho) = \emptyset$.

$X \in \mathcal{N}$: $\text{Cyl}(X, \rho) := ([O; X] \oplus B(O, \rho)) \cap B(O, |X|)$

- Si $\text{Cyl}(X, \rho) \cap \mathcal{N} = \emptyset$ alors $A(X) := O$.
- Sinon

$$A(X) := \operatorname{argmax} \{|Y|, Y \in \text{Cyl}(X, \rho) \cap \mathcal{N}\}.$$

$A(X)$ est l'**ancêtre** de X . Il est p.s. unique.

Le Radial Poisson Tree \mathcal{T}_ρ

\mathcal{N} est un Processus Ponctuel de Poisson (PPP) dans \mathbb{R}^2 homogène d'intensité 1.

$\rho > 0$ est un paramètre.

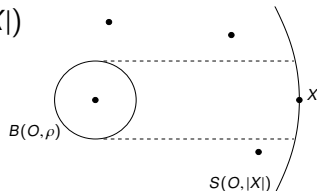
Supposons que $\mathcal{N} \cap B(O, \rho) = \emptyset$.

$X \in \mathcal{N}$: $\text{Cyl}(X, \rho) := ([O; X] \oplus B(O, \rho)) \cap B(O, |X|)$

- Si $\text{Cyl}(X, \rho) \cap \mathcal{N} = \emptyset$ alors $A(X) := O$.
- Sinon

$$A(X) := \operatorname{argmax} \{|Y|, Y \in \text{Cyl}(X, \rho) \cap \mathcal{N}\}.$$

$A(X)$ est l'**ancêtre** de X . Il est p.s. unique.



Le Radial Poisson Tree \mathcal{T}_ρ

\mathcal{N} est un Processus Ponctuel de Poisson (PPP) dans \mathbb{R}^2 homogène d'intensité 1.

$\rho > 0$ est un paramètre.

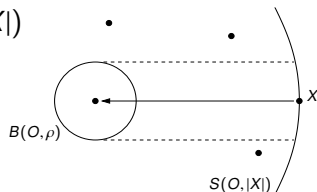
Supposons que $\mathcal{N} \cap B(O, \rho) = \emptyset$.

$X \in \mathcal{N}$: $\text{Cyl}(X, \rho) := ([O; X] \oplus B(O, \rho)) \cap B(O, |X|)$

- Si $\text{Cyl}(X, \rho) \cap \mathcal{N} = \emptyset$ alors $A(X) := O$.
- Sinon

$$A(X) := \operatorname{argmax} \{|Y|, Y \in \text{Cyl}(X, \rho) \cap \mathcal{N}\}.$$

$A(X)$ est l'**ancêtre** de X . Il est p.s. unique.



Le Radial Poisson Tree \mathcal{T}_ρ

\mathcal{N} est un Processus Ponctuel de Poisson (PPP) dans \mathbb{R}^2 homogène d'intensité 1.

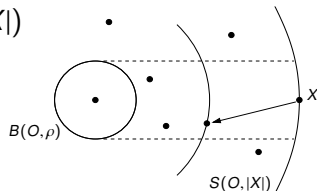
$\rho > 0$ est un paramètre.

Supposons que $\mathcal{N} \cap B(O, \rho) = \emptyset$.

$X \in \mathcal{N}$: $\text{Cyl}(X, \rho) := ([O; X] \oplus B(O, \rho)) \cap B(O, |X|)$

- Si $\text{Cyl}(X, \rho) \cap \mathcal{N} = \emptyset$ alors $A(X) := O$.
- Sinon

$$A(X) := \operatorname{argmax} \{|Y|, Y \in \text{Cyl}(X, \rho) \cap \mathcal{N}\}.$$



$A(X)$ est l'ancêtre de X . Il est p.s. unique.

Le Radial Poisson Tree \mathcal{T}_ρ

\mathcal{N} est un Processus Ponctuel de Poisson (PPP) dans \mathbb{R}^2 homogène d'intensité 1.

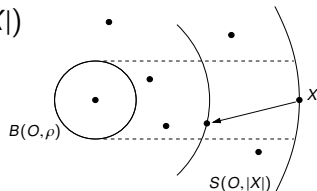
$\rho > 0$ est un paramètre.

Supposons que $\mathcal{N} \cap B(O, \rho) = \emptyset$.

$X \in \mathcal{N}$: $\text{Cyl}(X, \rho) := ([O; X] \oplus B(O, \rho)) \cap B(O, |X|)$

- Si $\text{Cyl}(X, \rho) \cap \mathcal{N} = \emptyset$ alors $A(X) := O$.
- Sinon

$$A(X) := \operatorname{argmax} \{|Y|, Y \in \text{Cyl}(X, \rho) \cap \mathcal{N}\}.$$



$A(X)$ est l'**ancêtre** de X . Il est p.s. unique.

Le Radial Poisson Tree \mathcal{T}_ρ

\mathcal{N} est un Processus Ponctuel de Poisson (PPP) dans \mathbb{R}^2 homogène d'intensité 1.

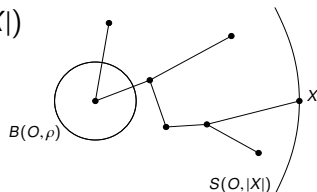
$\rho > 0$ est un paramètre.

Supposons que $\mathcal{N} \cap B(O, \rho) = \emptyset$.

$X \in \mathcal{N}$: $\text{Cyl}(X, \rho) := ([O; X] \oplus B(O, \rho)) \cap B(O, |X|)$

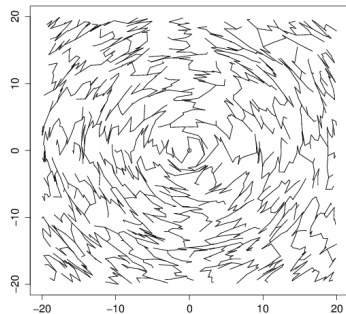
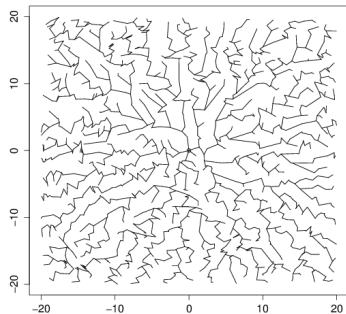
- Si $\text{Cyl}(X, \rho) \cap \mathcal{N} = \emptyset$ alors $A(X) := O$.
- Sinon

$$A(X) := \operatorname{argmax} \{|Y|, Y \in \text{Cyl}(X, \rho) \cap \mathcal{N}\}.$$



$A(X)$ est l'**ancêtre** de X . Il est p.s. unique.

Deux simulations du RPT \mathcal{T}_ρ



Construits sur le même PPP \mathcal{N} , le RPT avec $\rho = 1$ (à gauche)
et $\rho = 2$ (à droite).

- Relié (en un certain sens) à une forêt dirigée introduite par Ferrari, Landim & Thorisson en '04.
- Sa structure de graphe est **locale**.
- $\forall \rho > 0$, p.s. ses branches ne se croisent pas.
- $\forall \rho > 0$ et $\forall X \in \mathcal{N} \cup \{O\}$, $\{Y \in \mathcal{N}, A(Y) = X\}$ est p.s. fini.
 $\Rightarrow \exists$ au moins une branche infinie dans \mathcal{T}_ρ .

- Relié (en un certain sens) à une forêt dirigée introduite par Ferrari, Landim & Thorisson en '04.
- Sa structure de graphe est **locale**.
- $\forall \rho > 0$, p.s. ses branches ne se croisent pas.
- $\forall \rho > 0$ et $\forall X \in \mathcal{N} \cup \{O\}$, $\{Y \in \mathcal{N}, A(Y) = X\}$ est p.s. fini.
 $\Rightarrow \exists$ au moins une branche infinie dans \mathcal{T}_ρ .

- Relié (en un certain sens) à une forêt dirigée introduite par Ferrari, Landim & Thorisson en '04.
- Sa structure de graphe est **locale**.
- $\forall \rho > 0$, p.s. ses branches ne se croisent pas.
- $\forall \rho > 0$ et $\forall X \in \mathcal{N} \cup \{O\}$, $\{Y \in \mathcal{N}, A(Y) = X\}$ est p.s. fini.
 $\Rightarrow \exists$ au moins une branche infinie dans \mathcal{T}_ρ .

- Relié (en un certain sens) à une forêt dirigée introduite par Ferrari, Landim & Thorisson en '04.
- Sa structure de graphe est **locale**.
- $\forall \rho > 0$, p.s. ses branches ne se croisent pas.
- $\forall \rho > 0$ et $\forall X \in \mathcal{N} \cup \{O\}$, $\{Y \in \mathcal{N}, A(Y) = X\}$ est p.s. fini.
 $\Rightarrow \exists$ au moins une branche infinie dans \mathcal{T}_ρ .

Le Euclidean FPP Tree \mathcal{T}_α

\mathcal{N} est un PPP dans \mathbb{R}^2 homogène d'intensité 1.

$\alpha > 0$ est un paramètre.

X^O est le point de \mathcal{N} le plus proche de O .

Tout $X \in \mathcal{N}$ est relié à X^O par sa **géodésique** γ_X :

$$\gamma_X := \operatorname{argmin} \left\{ \sum_{1 \leq i \leq n-1} |X_i - X_{i+1}|^\alpha, \begin{array}{l} X_1 = X^O, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n = X \\ \text{sont des points de } \mathcal{N} \text{ and } n \geq 2 \end{array} \right\}.$$

$A(X)$: l'**ancêtre** de X .

Le Euclidean FPP Tree \mathcal{T}_α

\mathcal{N} est un PPP dans \mathbb{R}^2 homogène d'intensité 1.

$\alpha > 0$ est un paramètre.

X^O est le point de \mathcal{N} le plus proche de O .

Tout $X \in \mathcal{N}$ est relié à X^O par sa **géodésique** γ_X :

$$\gamma_X := \operatorname{argmin} \left\{ \sum_{1 \leq i \leq n-1} |X_i - X_{i+1}|^\alpha, \begin{array}{l} X_1 = X^O, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n = X \\ \text{sont des points de } \mathcal{N} \text{ and } n \geq 2 \end{array} \right\}.$$

$A(X)$: l'**ancêtre** de X .

Le Euclidean FPP Tree \mathcal{T}_α

\mathcal{N} est un PPP dans \mathbb{R}^2 homogène d'intensité 1.

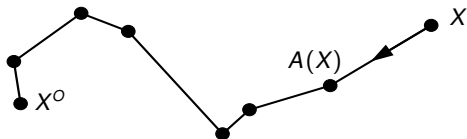
$\alpha > 0$ est un paramètre.

X^O est le point de \mathcal{N} le plus proche de O .

Tout $X \in \mathcal{N}$ est relié à X^O par sa **géodésique** γ_X :

$$\gamma_X := \operatorname{argmin} \left\{ \sum_{1 \leq i \leq n-1} |X_i - X_{i+1}|^\alpha, \begin{array}{l} X_1 = X^O, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n = X \\ \text{sont des points de } \mathcal{N} \text{ and } n \geq 2 \end{array} \right\}.$$

$A(X)$: l'**ancêtre** de X .



- $\forall \alpha > 0$ et $\forall X \in \mathcal{N}$, existence et unicité p.s. de γ_X .
 $\Rightarrow \mathcal{T}_\alpha$ est un arbre enraciné en X^0 .
- Introduit par Howard & Newman en '97 et '01.
- Sa structure de graphe est **globale**.
- $\forall \alpha \geq 2$, p.s. ses branches ne se croisent pas.
- $\forall \alpha > 1$ et $\forall X \in \mathcal{N}$, $\{Y \in \mathcal{N}, A(Y) = X\}$ est p.s. fini.
 $\Rightarrow \exists$ au moins une branche infinie dans \mathcal{T}_α .

- $\forall \alpha > 0$ et $\forall X \in \mathcal{N}$, existence et unicité p.s. de γ_X .
 $\Rightarrow \mathcal{T}_\alpha$ est un arbre enraciné en X^0 .
- Introduit par Howard & Newman en '97 et '01.
- Sa structure de graphe est globale.
- $\forall \alpha \geq 2$, p.s. ses branches ne se croisent pas.
- $\forall \alpha > 1$ et $\forall X \in \mathcal{N}$, $\{Y \in \mathcal{N}, A(Y) = X\}$ est p.s. fini.
 $\Rightarrow \exists$ au moins une branche infinie dans \mathcal{T}_α .

- $\forall \alpha > 0$ et $\forall X \in \mathcal{N}$, existence et unicité p.s. de γ_X .
 $\Rightarrow \mathcal{T}_\alpha$ est un arbre enraciné en X^0 .
- Introduit par Howard & Newman en '97 et '01.
- Sa structure de graphe est **globale**.
- $\forall \alpha \geq 2$, p.s. ses branches ne se croisent pas.
- $\forall \alpha > 1$ et $\forall X \in \mathcal{N}$, $\{Y \in \mathcal{N}, A(Y) = X\}$ est p.s. fini.
 $\Rightarrow \exists$ au moins une branche infinie dans \mathcal{T}_α .

- $\forall \alpha > 0$ et $\forall X \in \mathcal{N}$, existence et unicité p.s. de γ_X .
 $\Rightarrow \mathcal{T}_\alpha$ est un arbre enraciné en X^0 .
- Introduit par Howard & Newman en '97 et '01.
- Sa structure de graphe est **globale**.
- $\forall \alpha \geq 2$, p.s. ses branches ne se croisent pas.
- $\forall \alpha > 1$ et $\forall X \in \mathcal{N}$, $\{Y \in \mathcal{N}, A(Y) = X\}$ est p.s. fini.
 $\Rightarrow \exists$ au moins une branche infinie dans \mathcal{T}_α .

- $\forall \alpha > 0$ et $\forall X \in \mathcal{N}$, existence et unicité p.s. de γ_X .
 $\Rightarrow \mathcal{T}_\alpha$ est un arbre enraciné en X^O .
- Introduit par Howard & Newman en '97 et '01.
- Sa structure de graphe est **globale**.
- $\forall \alpha \geq 2$, p.s. ses branches ne se croisent pas.
- $\forall \alpha > 1$ et $\forall X \in \mathcal{N}$, $\{Y \in \mathcal{N}, A(Y) = X\}$ est p.s. fini.
 $\Rightarrow \exists$ au moins une branche infinie dans \mathcal{T}_α .

- 1 Deux modèles d'arbres aléatoires géométriques ($d = 2$)
- 2 Que dire de leurs branches infinies ?
- 3 Quelques mots sur la preuve

Howard & Newman en '01 ont développé une méthode efficace décrivant les branches infinies des arbres tendus...

Soit \mathcal{T} un arbre aléatoire géométrique dans \mathbb{R}^2 .

- Pour tout sommet X , $\mathcal{T}_X^{\text{out}}$ est le sous-arbre de \mathcal{T} enraciné en X .
- $X \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon > 0$, $C(X, \varepsilon) := \{Y \in \mathbb{R}^2, \text{ang}(X, Y) \leq \varepsilon\}$.

Definition

\mathcal{T} est **tendu** si $\exists f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ avec $\lim_{\ell \rightarrow \infty} f(\ell) = 0$ tel que p.s. pour tout sommet X sauf un nombre fini, $\mathcal{T}_X^{\text{out}} \subset C(X, f(|X|))$.

Arbres tendus

Howard & Newman en '01 ont développé une méthode efficace décrivant les branches infinies des arbres tendus...

Soit \mathcal{T} un arbre aléatoire géométrique dans \mathbb{R}^2 .

- Pour tout sommet X , $\mathcal{T}_X^{\text{out}}$ est le sous-arbre de \mathcal{T} enraciné en X .
- $X \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon > 0$, $C(X, \varepsilon) := \{Y \in \mathbb{R}^2, \text{ang}(X, Y) \leq \varepsilon\}$.

Definition

\mathcal{T} est **tendu** si $\exists f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ avec $\lim_{\ell \rightarrow \infty} f(\ell) = 0$ tel que p.s. pour tout sommet X sauf un nombre fini, $\mathcal{T}_X^{\text{out}} \subset C(X, f(|X|))$.



Arbres tendus

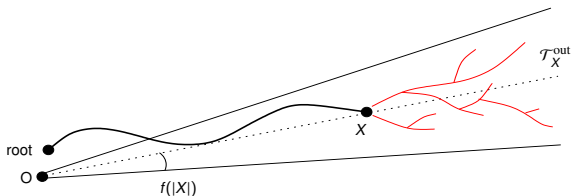
Howard & Newman en '01 ont développé une méthode efficace décrivant les branches infinies des arbres tendus...

Soit \mathcal{T} un arbre aléatoire géométrique dans \mathbb{R}^2 .

- Pour tout sommet X , $\mathcal{T}_X^{\text{out}}$ est le sous-arbre de \mathcal{T} enraciné en X .
- $X \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon > 0$, $C(X, \varepsilon) := \{Y \in \mathbb{R}^2, \text{ang}(X, Y) \leq \varepsilon\}$.

Definition

\mathcal{T} est **tendu** si $\exists f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ avec $\lim_{\ell \rightarrow \infty} f(\ell) = 0$ tel que p.s. pour tout sommet X sauf un nombre fini, $\mathcal{T}_X^{\text{out}} \subset C(X, f(|X|))$.



Résultats de Howard & Newman '01

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une **direction asymptotique** $\theta \in [0; 2\pi)$ si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{|X_n|} = e^{i\theta}$.

Theorem (Howard & Newman '01)

Soit \mathcal{T} un arbre aléatoire géométrique tendu dans \mathbb{R}^2 construit sur un PPP \mathcal{N} . Alors :

- (1) p.s. toute branche infinie de \mathcal{T} admet une direction asymptotique ;
- (2) p.s. pour tout $\theta \in [0; 2\pi)$, il y a au moins une branche infinie de \mathcal{T} avec direction asymptotique θ .

- (C. '14) $\forall \rho > 0$, \mathcal{T}_ρ est tendu avec $f(\ell) = \ell^{-\frac{1}{2} + \varepsilon}$ et $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.
- (Howard & Newman '01) $\forall \alpha > 1$, \mathcal{T}_α est tendu avec $f(\ell) = \ell^{-\frac{1}{4} + \varepsilon}$ et $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$.

Résultats de Howard & Newman '01

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une **direction asymptotique** $\theta \in [0; 2\pi)$ si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{|X_n|} = e^{i\theta}$.

Theorem (Howard & Newman '01)

Soit \mathcal{T} un arbre aléatoire géométrique tendu dans \mathbb{R}^2 construit sur un PPP \mathcal{N} . Alors :

- (1) p.s. toute branche infinie de \mathcal{T} admet une direction asymptotique ;
- (2) p.s. pour tout $\theta \in [0; 2\pi)$, il y a au moins une branche infinie de \mathcal{T} avec direction asymptotique θ .

- (C. '14) $\forall \rho > 0$, \mathcal{T}_ρ est tendu avec $f(\ell) = \ell^{-\frac{1}{2} + \varepsilon}$ et $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.
- (Howard & Newman '01) $\forall \alpha > 1$, \mathcal{T}_α est tendu avec $f(\ell) = \ell^{-\frac{1}{4} + \varepsilon}$ et $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$.

Résultats de Howard & Newman '01

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une **direction asymptotique** $\theta \in [0; 2\pi)$ si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{|X_n|} = e^{i\theta}$.

Theorem (Howard & Newman '01)

Soit \mathcal{T} un arbre aléatoire géométrique tendu dans \mathbb{R}^2 construit sur un PPP \mathcal{N} . Alors :

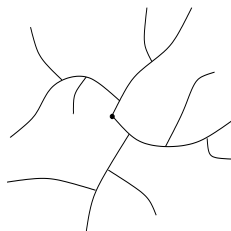
- (1) p.s. toute branche infinie de \mathcal{T} admet une direction asymptotique ;
- (2) p.s. pour tout $\theta \in [0; 2\pi)$, il y a au moins une branche infinie de \mathcal{T} avec direction asymptotique θ .

- (C. '14) $\forall \rho > 0$, \mathcal{T}_ρ est tendu avec $f(\ell) = \ell^{-\frac{1}{2} + \varepsilon}$ et $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.
- (Howard & Newman '01) $\forall \alpha > 1$, \mathcal{T}_α est tendu avec $f(\ell) = \ell^{-\frac{1}{4} + \varepsilon}$ et $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$.

Sous-linéarité des branches infinies de $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\rho$ ou \mathcal{T}_α

χ_r : nombre de branches infinies de \mathcal{T} coupant $S(O, r)$.

$\chi_r(\theta, c)$: nombre de branches infinies de \mathcal{T} coupant l'arc de $S(O, r)$ centré en $re^{i\theta}$ et de longueur c .



Rq : • $\chi_r \xrightarrow{\text{p.s.}} \infty$.

• Le nombre moyen d'arêtes de \mathcal{T} coupant $S(O, r)$ est de l'ordre de r .

Theorem (C. '14)

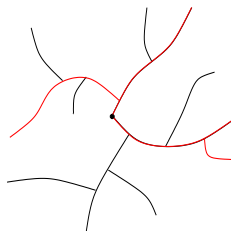
Pour $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\rho$ avec $\rho > 0$ ou $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\alpha$ avec $\alpha \geq 2$:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{E} \frac{\chi_r}{r} = 0 \quad \text{et} \quad \chi_r(\theta, c) \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^1 \text{ mais pas p.s.}$$

Sous-linéarité des branches infinies de $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\rho$ ou \mathcal{T}_α

χ_r : nombre de branches infinies de \mathcal{T}
coupant $S(O, r)$.

$\chi_r(\theta, c)$: nombre de branches infinies de \mathcal{T}
coupant l'arc de $S(O, r)$ centré
en $re^{i\theta}$ et de longueur c .



Rq : • $\chi_r \xrightarrow{\text{p.s.}} \infty$.

• Le nombre moyen d'arêtes de \mathcal{T} coupant $S(O, r)$ est de l'ordre de r .

Theorem (C. '14)

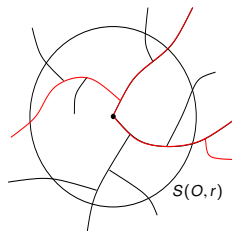
Pour $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\rho$ avec $\rho > 0$ ou $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\alpha$ avec $\alpha \geq 2$:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{E} \frac{\chi_r}{r} = 0 \quad \text{et} \quad \chi_r(\theta, c) \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^1 \text{ mais pas p.s.}$$

Sous-linéarité des branches infinies de $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\rho$ ou \mathcal{T}_α

χ_r : nombre de branches infinies de \mathcal{T}
coupant $S(O, r)$.

$\chi_r(\theta, c)$: nombre de branches infinies de \mathcal{T}
coupant l'arc de $S(O, r)$ centré
en $re^{i\theta}$ et de longueur c .



Rq : • $\chi_r \xrightarrow{\text{p.s.}} \infty$.

• Le nombre moyen d'arêtes de \mathcal{T} coupant $S(O, r)$ est de l'ordre de r .

Theorem (C. '14)

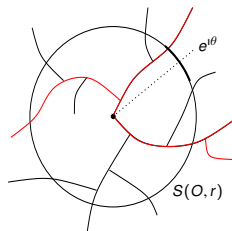
Pour $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\rho$ avec $\rho > 0$ ou $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\alpha$ avec $\alpha \geq 2$:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{E} \frac{\chi_r}{r} = 0 \quad \text{et} \quad \chi_r(\theta, c) \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^1 \text{ mais pas p.s.}$$

Sous-linéarité des branches infinies de $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\rho$ ou \mathcal{T}_α

χ_r : nombre de branches infinies de \mathcal{T} coupant $S(O, r)$.

$\chi_r(\theta, c)$: nombre de branches infinies de \mathcal{T} coupant l'arc de $S(O, r)$ centré en $re^{i\theta}$ et de longueur c .



Rq : • $\chi_r \xrightarrow{\text{p.s.}} \infty$.

• Le nombre moyen d'arêtes de \mathcal{T} coupant $S(O, r)$ est de l'ordre de r .

Theorem (C. '14)

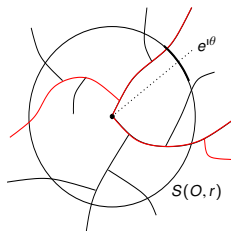
Pour $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\rho$ avec $\rho > 0$ ou $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\alpha$ avec $\alpha \geq 2$:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{E} \frac{\chi_r}{r} = 0 \quad \text{et} \quad \chi_r(\theta, c) \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^1 \text{ mais pas p.s.}$$

Sous-linéarité des branches infinies de $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\rho$ ou \mathcal{T}_α

χ_r : nombre de branches infinies de \mathcal{T} coupant $S(O, r)$.

$\chi_r(\theta, c)$: nombre de branches infinies de \mathcal{T} coupant l'arc de $S(O, r)$ centré en $re^{i\theta}$ et de longueur c .



Rq : • $\chi_r \xrightarrow{\text{p.s.}} \infty$.

• Le nombre moyen d'arêtes de \mathcal{T} coupant $S(O, r)$ est de l'ordre de r .

Theorem (C. '14)

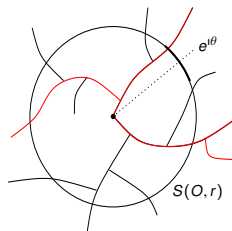
Pour $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\rho$ avec $\rho > 0$ ou $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\alpha$ avec $\alpha \geq 2$:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{E} \frac{\chi_r}{r} = 0 \quad \text{et} \quad \chi_r(\theta, c) \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^1 \text{ mais pas p.s.}$$

Sous-linéarité des branches infinies de $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\rho$ ou \mathcal{T}_α

χ_r : nombre de branches infinies de \mathcal{T} coupant $S(O, r)$.

$\chi_r(\theta, c)$: nombre de branches infinies de \mathcal{T} coupant l'arc de $S(O, r)$ centré en $re^{i\theta}$ et de longueur c .



Rq : • $\chi_r \xrightarrow{\text{p.s.}} \infty$.

• Le nombre moyen d'arêtes de \mathcal{T} coupant $S(O, r)$ est de l'ordre de r .

Theorem (C. '14)

Pour $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\rho$ avec $\rho > 0$ ou $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\alpha$ avec $\alpha \geq 2$:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{E} \frac{\chi_r}{r} = 0 \quad \text{et} \quad \chi_r(\theta, c) \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^1 \text{ mais pas p.s.}$$

- 1 Deux modèles d'arbres aléatoires géométriques ($d = 2$)
- 2 Que dire de leurs branches infinies ?
- 3 Quelques mots sur la preuve

Une preuve robuste

La preuve est basée sur une méthode générale qui *devrait* s'appliquer aux arbres...

- dont la structure de graphe est locale :
 - 1 le RPT \mathcal{T}_ρ , pour $\rho > 0$;
 - 2 le Radial Spanning Tree de Baccelli & Bordenave en '07 ;
 - 3 les Navigation Trees de Bonichon & Marckert en '11 ;
- dont la structure de graphe est globale :
 - 1 le Euclidean FPP Tree \mathcal{T}_α , pour $\alpha \geq 2$;
 - 2 le directed LPP model sur \mathbb{N}^2 (avec temps exponentiels i.i.d.) ;
 - 3 le Shortest-path Tree sur la triangulation de Delaunay de Hirsch et al en '14.

Une preuve robuste

La preuve est basée sur une méthode générale qui *devrait* s'appliquer aux arbres...

- dont la structure de graphe est locale :

- 1 le RPT \mathcal{T}_ρ , pour $\rho > 0$;
- 2 le Radial Spanning Tree de Baccelli & Bordenave en '07 ;
- 3 les Navigation Trees de Bonichon & Marckert en '11 ;

- dont la structure de graphe est globale :

- 1 le Euclidean FPP Tree \mathcal{T}_α , pour $\alpha \geq 2$;
- 2 le directed LPP model sur \mathbb{N}^2 (avec temps exponentiels i.i.d.) ;
- 3 le Shortest-path Tree sur la triangulation de Delaunay de Hirsch et al en '14.

Une preuve robuste

La preuve est basée sur une méthode générale qui *devrait* s'appliquer aux arbres...

- dont la structure de graphe est locale :

- 1 le RPT \mathcal{T}_ρ , pour $\rho > 0$;
- 2 le Radial Spanning Tree de Baccelli & Bordenave en '07 ;
- 3 les Navigation Trees de Bonichon & Marckert en '11 ;

- dont la structure de graphe est globale :

- 1 le Euclidean FPP Tree \mathcal{T}_α , pour $\alpha \geq 2$;
- 2 le directed LPP model sur \mathbb{N}^2 (avec temps exponentiels i.i.d.) ;
- 3 le Shortest-path Tree sur la triangulation de Delaunay de Hirsch et al en '14.

Une preuve robuste

La preuve est basée sur une méthode générale qui *devrait* s'appliquer aux arbres...

- dont la structure de graphe est locale :

- 1 le RPT \mathcal{T}_ρ , pour $\rho > 0$;
- 2 le Radial Spanning Tree de Baccelli & Bordenave en '07 ;
- 3 les Navigation Trees de Bonichon & Marckert en '11 ;

- dont la structure de graphe est globale :

- 1 le Euclidean FPP Tree \mathcal{T}_α , pour $\alpha \geq 2$;
- 2 le directed LPP model sur \mathbb{N}^2 (avec temps exponentiels i.i.d.) ;
- 3 le Shortest-path Tree sur la triangulation de Delaunay de Hirsch et al en '14.

Une preuve robuste

La preuve est basée sur une méthode générale qui *devrait* s'appliquer aux arbres...

- dont la structure de graphe est locale :
 - 1 le RPT \mathcal{T}_ρ , pour $\rho > 0$;
 - 2 le Radial Spanning Tree de Baccelli & Bordenave en '07 ;
 - 3 les Navigation Trees de Bonichon & Marckert en '11 ;
- dont la structure de graphe est globale :
 - 1 le Euclidean FPP Tree \mathcal{T}_α , pour $\alpha \geq 2$;
 - 2 le directed LPP model sur \mathbb{N}^2 (avec temps exponentiels i.i.d.) ;
 - 3 le Shortest-path Tree sur la triangulation de Delaunay de Hirsch et al en '14.

Une preuve robuste

La preuve est basée sur une méthode générale qui *devrait* s'appliquer aux arbres...

- dont la structure de graphe est locale :
 - 1 le RPT \mathcal{T}_ρ , pour $\rho > 0$;
 - 2 le Radial Spanning Tree de Baccelli & Bordenave en '07 ;
 - 3 les Navigation Trees de Bonichon & Marckert en '11 ;
- dont la structure de graphe est globale :
 - 1 le Euclidean FPP Tree \mathcal{T}_α , pour $\alpha \geq 2$;
 - 2 le directed LPP model sur \mathbb{N}^2 (avec temps exponentiels i.i.d.) ;
 - 3 le Shortest-path Tree sur la triangulation de Delaunay de Hirsch et al en '14.

Une preuve robuste

La preuve est basée sur une méthode générale qui *devrait* s'appliquer aux arbres...

- dont la structure de graphe est locale :
 - 1 le RPT \mathcal{T}_ρ , pour $\rho > 0$;
 - 2 le Radial Spanning Tree de Baccelli & Bordenave en '07 ;
 - 3 les Navigation Trees de Bonichon & Marckert en '11 ;
- dont la structure de graphe est globale :
 - 1 le Euclidean FPP Tree \mathcal{T}_α , pour $\alpha \geq 2$;
 - 2 le directed LPP model sur \mathbb{N}^2 (avec temps exponentiels i.i.d.) ;
 - 3 le Shortest-path Tree sur la triangulation de Delaunay de Hirsch et al en '14.

ÉTAPE 1 : Par isotropie et une condition uniforme de moments, il est suffisant de prouver que $\mathbb{P}(\chi_r(0, 2\pi) \geq 1) \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow \infty$.

ÉTAPE 2 : Approximation locale par une forêt dirigée \mathcal{F} .

Pour toute fonction locale F ,

$$d_{TV}(F((r, 0), \mathcal{T}), F(O, \mathcal{F})) \rightarrow 0.$$

★ \mathcal{F} est de nature différente selon que \mathcal{T} est le RPT \mathcal{T}_ρ ou le Euclidean FPP Tree \mathcal{T}_α .

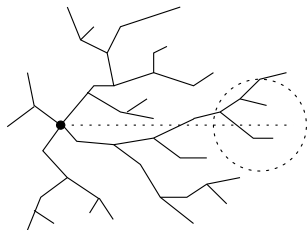
ÉTAPE 3 : La forêt dirigée \mathcal{F} admet p.s. une seule fin topologique.

ÉTAPE 4 : Conclusion.

ÉTAPE 1 : Par isotropie et une condition uniforme de moments, il est suffisant de prouver que $\mathbb{P}(\chi_r(0, 2\pi) \geq 1) \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow \infty$.

ÉTAPE 2 : Approximation locale par une forêt dirigée \mathcal{F} .

Pour toute fonction locale F ,

$$d_{TV}(F((r, 0), \mathcal{T}), F(O, \mathcal{F})) \rightarrow 0.$$


★ \mathcal{F} est de nature différente selon que \mathcal{T} est le RPT \mathcal{T}_ρ ou le Euclidean FPP Tree \mathcal{T}_α .

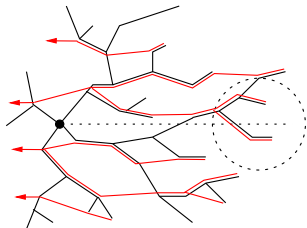
ÉTAPE 3 : La forêt dirigée \mathcal{F} admet p.s. une seule fin topologique.

ÉTAPE 4 : Conclusion.

ÉTAPE 1 : Par isotropie et une condition uniforme de moments, il est suffisant de prouver que $\mathbb{P}(\chi_r(0, 2\pi) \geq 1) \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow \infty$.

ÉTAPE 2 : Approximation locale par une forêt dirigée \mathcal{F} .

Pour toute fonction locale F ,

$$d_{TV}(F((r, 0), \mathcal{T}), F(O, \mathcal{F})) \rightarrow 0.$$


★ \mathcal{F} est de nature différente selon que \mathcal{T} est le RPT \mathcal{T}_ρ ou le Euclidean FPP Tree \mathcal{T}_α .

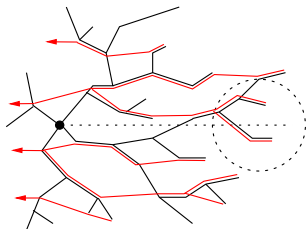
ÉTAPE 3 : La forêt dirigée \mathcal{F} admet p.s. une seule fin topologique.

ÉTAPE 4 : Conclusion.

ÉTAPE 1 : Par isotropie et une condition uniforme de moments, il est suffisant de prouver que $\mathbb{P}(\chi_r(0, 2\pi) \geq 1) \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow \infty$.

ÉTAPE 2 : Approximation locale par une forêt dirigée \mathcal{F} .

Pour toute fonction locale F ,

$$d_{TV}(F((r, 0), \mathcal{T}), F(O, \mathcal{F})) \rightarrow 0.$$


★ \mathcal{F} est de nature différente selon que \mathcal{T} est le RPT \mathcal{T}_ρ ou le Euclidean FPP Tree \mathcal{T}_α .

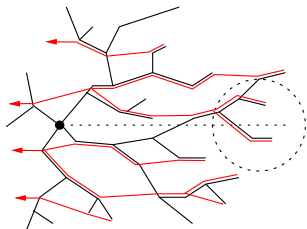
ÉTAPE 3 : La forêt dirigée \mathcal{F} admet p.s. une seule fin topologique.

ÉTAPE 4 : Conclusion.

ÉTAPE 1 : Par isotropie et une condition uniforme de moments, il est suffisant de prouver que $\mathbb{P}(\chi_r(0, 2\pi) \geq 1) \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow \infty$.

ÉTAPE 2 : Approximation locale par une forêt dirigée \mathcal{F} .

Pour toute fonction locale F ,

$$d_{TV}(F((r, 0), \mathcal{T}), F(O, \mathcal{F})) \rightarrow 0.$$


★ \mathcal{F} est de nature différente selon que \mathcal{T} est le RPT \mathcal{T}_ρ ou le Euclidean FPP Tree \mathcal{T}_α .

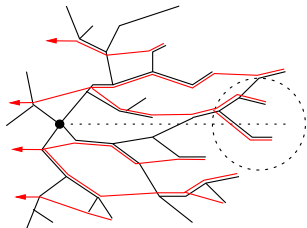
ÉTAPE 3 : La forêt dirigée \mathcal{F} admet p.s. une seule fin topologique.

ÉTAPE 4 : Conclusion.

ÉTAPE 1 : Par isotropie et une condition uniforme de moments, il est suffisant de prouver que $\mathbb{P}(\chi_r(0, 2\pi) \geq 1) \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow \infty$.

ÉTAPE 2 : Approximation locale par une forêt dirigée \mathcal{F} .

Pour toute fonction locale F ,

$$d_{TV}(F((r, 0), \mathcal{T}), F(O, \mathcal{F})) \rightarrow 0.$$


★ \mathcal{F} est de nature différente selon que \mathcal{T} est le RPT \mathcal{T}_ρ ou le Euclidean FPP Tree \mathcal{T}_α .

ÉTAPE 3 : La forêt dirigée \mathcal{F} admet p.s. une seule fin topologique.

ÉTAPE 4 : Conclusion.

- F. Baccelli and C. Bordenave. The Radial Spanning Tree of a Poisson point process. *Annals of Applied Probability*, 17(1):305–359, 2007.
- F. Baccelli, D. Coupier, and V. C. Tran. Semi-infinite paths of the two-dimensional radial spanning tree. *Adv. in Appl. Probab.*, 45(4):895–916, 2013.
- N. Bonichon and J.-F. Marckert. Asymptotics of geometrical navigation on a random set of points in the plane. *Adv. in Appl. Probab.*, 43(4):899–942, 2011.
- D. Coupier. Sublinearity of the mean number of semi-infinite branches for geometric random trees. *Submitted*, 2015.
- D. Coupier and V. C. Tran. The 2D-directed spanning forest is almost surely a tree. *Random Structures Algorithms*, 42(1):59–72, 2013.
- P. A. Ferrari, C. Landim, and H. Thorisson. Poisson trees, succession lines and coalescing random walks. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 40:141–152, 2004.
- C. Hirsch, D. Neuhaeuser, C. Gloaguen and V. Schmidt. First-passage percolation on random geometric graphs and an application to shortest-path trees. *Adv. in Appl. Probab.* (to appear).
- C. D. Howard and C. M. Newman. Geodesics and spanning trees for Euclidean first-passage percolation. *Ann. Probab.*, 29(2):577–623, 2001.