Automates cellulaires et percolation

Exercice 1 On se donne un entier $N \geq 1$, et on s'intéresse à l'évolution de l'AC trafic sur l'anneau fini $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ (c'est-à-dire sur une fenêtre de taille N, avec des conditions aux bords périodiques). On note N_0 (resp. N_1) le nombre de 0 (resp. de 1) dans la configuration initiale, et on pose $T = \lceil N/2 \rceil$. Montrer que :
• si $N_0 \geq N_1$, alors à partir du temps T, les configurations ne contiennent plus le motif 11,
• si $N_1 \geq N_0$, alors à partir du temps T, les configurations ne contiennent plus le motif 00.

Exercice 2 On considère l'ACP binaire de dimension 1 et de voisinage $\mathcal{N} = \{0, 1\}$, défini par la règle locale :

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= (1 - \varepsilon)\, \delta_{x+y} + \varepsilon\, \delta_{x+y+1} \\ &= \begin{cases} x + y \text{ avec probabilité } 1 - \varepsilon \\ x + y + 1 \text{ avec probabilité } \varepsilon, \end{cases}\end{aligned}$$

où les sommes $x + y$ et $x + y + 1$ sont calculées modulo 2.

1. Montrer que quelle que soit la valeur du paramètre $\varepsilon \in [0, 1]$, la mesure uniforme $\mathbb{P}_{1/2} = \mathcal{B}(1/2)^{\otimes\mathbb{Z}}$ est une mesure invariante de cet ACP. On pourra commencer par traiter le cas $\varepsilon = 0$.
2. Montrer que lorsque ε est petit, l'ACP enveloppe de cet ACP n'est pas ergodique.
3. Montrer que l'ACP est néanmoins ergodique pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$.

Exercice 3 On considère un ACP binaire de dimension 1 et de voisinage $\mathcal{N} = \{0, 1\}$, et on note θ_{ij} la probabilité qu'une cellule passe à l'état 1 quand son voisinage est à l'état ij. Montrer que si l'une des conditions ci-dessous est vérifiée, alors la mesure de Bernoulli produit $\mathbb{P}_p = \mathcal{B}(p)^{\otimes\mathbb{Z}}$ est une mesure invariante de l'ACP.

(i) $(1 - p)\, \theta_{00} + p\, \theta_{10} = (1 - p)\, \theta_{01} + p\, \theta_{11} = p$

(ii) $(1 - p)\, \theta_{00} + p\, \theta_{01} = (1 - p)\, \theta_{10} + p\, \theta_{11} = p$

Exercice 4 On s'intéresse à l'évolution de l'AC bootstrap, sur une grille finie de taille $N \times N$ (avec conditions aux bords vides). Trouver le plus petit entier n tel qu'il existe une configuration initiale contenant seulement n cellules dans l'état 1, à partir de laquelle l'état 1 remplit toute la grille.

Exercice 5 Sur $\mathbb{Z}^2$, l'AC de la majorité de Toom a la propriété d'érosion, ce qui signifie qu'il corrige toute perturbation finie des deux configurations $\underline{\mathbf{0}}$ et $\underline{\mathbf{1}}$.

1. Trouver un AC qui corrige les perturbations finies des deux configurations en damier.
2. Un k-coloriage est un coloriage des cellules de la grille $\mathbb{Z}^2$ avec k couleurs, tel que deux cellules adjacentes sont toujours de couleurs différentes. Seriez-vous capable de trouver un AC qui corrige les perturbations finies des k-coloriages, pour un certain $k \geq 5$ fixé ? Et pour $k = 4$, ou $k = 3$? Plus précisément, on souhaite d'une part que les configurations valides (c'est-à-dire les configurations pour lesquelles deux cellules adjacentes ont des couleurs différentes) soient des points fixes de l'AC, et d'autre part qu'à partir d'une perturbation finie d'une configuration valide, l'AC atteigne une configuration valide après un nombre fini d'itérations.